

TERMODYNAMIKA A PRESTUP TEPLA



Peter Bokes



SLOVENSKÁ TECHNICKÁ
UNIVERZITA V BRATISLAVE
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY
A INFORMATIKY

TERMODYNAMIKA A PRESTUP TEPLA

TERMODYNAMIKA A PRESTUP TEPLA

Peter Bokes

Dielo je vydané pod medzinárodnou licenciou Creative Commons CC BY 4.0, ktorá povoľuje použitie, zdieľanie, prispôsobovanie, šírenie a reprodukovanie na ľubovoľnom médiu alebo v ľubovoľnom formáte, ak je uvedený pôvodný autor, zdroj a odkaz na Creative Commons licenciu, a ak sú vyznačené prípadné zmeny vykonané v diele. Viac informácií o licencií a použití diela na adrese:

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.



doc. Ing. Peter Bokes, PhD.

Recenzenti: prof. RNDr. Igor Medved, PhD.
doc. RNDr. Richard Hlubina, DrSc.
Ing. Juraj Paulech, PhD.

Schválilo Vedenie Fakulty elektrotechniky a informatiky STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-5438-5

Vydanie publikácie bolo realizované s podporou KEGA
v rámci projektu 006STU-4/2022
„Digitálna podpora predmetov fyzikálneho inžinierstva“.

Obsah

1	Termodynamika	6
1.1	Základné pojmy a predstavy	6
1.2	Práca	14
1.3	Prvý zákon termodynamický	17
1.4	Druhý zákon termodynamický	20
1.5	Entropia a prechod do rovnovážneho stavu	26
1.6	Derivácie stavových veličín a úloha meraní	30
1.7	Voľná energia a práca	34
1.8	Entalpia a tepelná kapacita	38
2	Rovnica spojitosti pre látku	43
2.1	Hustota a rýchlostné pole	43
2.2	Tok hmotnosti a hustota toku hmotnosti	45
2.3	Rovnica spojitosti pre hustotu, Eulerov pohľad	46
2.4	Hydrodynamická derivácia a Lagrangeov pohľad	48
2.5	Rovnica spojitosti pre viaczožkovú sústavu	50
2.6	Mikroskopický a makroskopický opis látky	52
3	Rovnica spojitosti pre hybnosť	54
3.1	Ďalekodosahové silové pôsobenie	54
3.2	Krátkodosahové silové pôsobenie	56
3.3	Pohybová rovnica pre látku	61
4	Rovnice spojitosti pre energiu	64
4.1	Hustoty celkovej, kinetickej a vnútornej energie	64
4.2	Rovnica spojitosti pre makroskopickú kinetickú energiu	66
4.3	Rovnica spojitosti pre vnútornú energiu	69
5	Nerovnovážna termodynamika	73
5.1	Lokálny tvar termodynamických zákonov	73
5.2	Kinetické koeficienty pre tuhé látky	75

5.3	Tenzor viskózneho napätia	87
5.4	Fyzikálna interpretácia viskozity	92
5.5	Pohybová rovnica viskózne tekutiny	93
5.6	Rovnica vedenia tepla	98
6	Stacionárne vedenie tepla	103
6.1	Stacionárna rovnica vedenia tepla	103
6.2	Okrajové podmienky	104
6.3	Analógia s elektrostatikou	109
6.4	Analógia s prúdovým poľom	110
6.5	Tepelný odpor	110
6.6	Skladanie tepelných odporov	113
6.7	Konvektívna okrajová podmienka a skladanie odporov	115
6.8	Tepelný odpor valcovej plochy	117
6.9	Produkcia vnútornej energie a okrajové podmienky	121
6.10	Kvázijednorozmerné úlohy	125
7	Prechodné deje	131
7.1	Opis priemernej teploty nehomogénneho telesa	131
7.2	Riešenie prechodného deja – chladnutie	135
7.3	Ohrievanie telesa	138
7.4	Riešenie diferenciálnej rovnice Laplaceovou transformáciou	140
7.5	Nestacionárne teplotné pole	141
8	Prestup tepla v tekutinách	145
8.1	Základné rovnice a pojmy	145
8.2	Koeficient prestupu tepla	153
8.3	Prúdenie vo valcovom potrubí	155
8.4	Pokles tlaku v potrubí	159
8.5	Prestup tepla v potrubí	163
8.6	Koeficient prestupu tepla v potrubí	166
8.7	Prirodzené prúdenie	169
8.8	Energetická bilancia medznej vrstvy	172
8.9	Koeficient prestupu tepla pri prirodzenom prúdení	173
9	Prenos tepla žiarením	177
9.1	Lambertov zákon a difúzny rozptyl	177
9.2	Kirchhoffov zákon	181
9.3	Prenos tepla radiáciou pre teleso v kavite	182

10 Metóda konečných prvkov	187
10.1 Slabé riešenie v 1D	187
10.2 Rozvoj do konečnej bázy	189
10.3 Formulácia algebraických rovníc	191
10.4 Zadanie okrajových podmienok v MKP	193
10.5 Elementárna matica K	195
10.6 Kvadratické a kubické bázové funkcie	198
10.7 MKP vo vyšších dimenziách	201
10.8 Prechodné deje a MKP	205
Zoznam použitých symbolov	207
Literatúra	211

Úvod

Termodynamika a technologické využitie prestupu tepla sa vzájomne inšpirujú a posúvajú k novým objavom a inováciám. Ich spoločná cesta zažila zlatú éru v čase formulácie termodynamických zákonov a rozvoja využívania parných strojov na konci 19. storočia. V súčasnosti, v čase explózie informačných technológií, majú významnú úlohu numerické simulácie rovníc vedenia tepla a prúdenia. Praktické výsledky, ktoré simulácie prinášajú nás presvedčajú, že expertízu v tejto oblasti je potrebné rozvíjať u budúcich inžinierov v oblasti energetiky, strojárstva, stavebníctva, elektrotechniky či chemických a materiálových technológií. Táto potreba viedla k vzniku vysokoškolských kurzov a učebníc s názvami ako je termomechanika a prestup, respektíve prenos tepla.

Rovnomenný predmet vyučujem od roku 2015 v rámci študijného programu Jadrové a fyzikálne inžinierstvo na Fakulte elektrotechniky a informatiky, Slovenskej technickej univerzity v Bratislave. V priebehu rokov som nadobudol presvedčenie, že študentom, ktorých cieľom je vedieť spočítať prestup tepla v inžinierskych úlohách, chýbajú znalosti termodynamiky potrebné na porozumenie rovníc opisujúcich prestup tepla, a teda aj hraníc ich použiteľnosti. Tiež som si všimol, že dostupné učebnice termomechaniky či prestupu tepla (učebnice [16-20] v zozname literatúry) sa nevelmi venujú otázke, odkiaľ sa vzali rovnice, ktoré riešime. Ich hlavným cieľom sú praktické postupy a vzťahy. Na druhej strane, učebnice termodynamiky [1-4], vrátane menej známej nerovnovážnej termodynamiky [1,13,14], nemajú priestor na expozíciu riešení odvodených rovníc a ich diskusiu pre inžinierske úlohy. Rozhodol som sa preto rozvrhnúť obsah predkladanej učebnice tak, aby zahŕňal fundamentálne základy formulácie potrebných konceptov a rovníc a zároveň aj dotiahol ich použitie k najdôležitejším praktickým výsledkom prestupu tepla. Mojm cieľom je, aby študenti porozumeli odkiaľ určitý vzťah či rovnica pochádza, aký má fyzikálny zmysel a aby získali základný cit pre to, akú dynamiku či stacionárny stav pri danej úlohe prestupu tepla môžu očakávať.

Chcel by som poďakovať recenzentom, Richardovi Hlubinovi, Igorovi Medvedovi a Jurajovi Paulechovi za ich mnohé užitočné rady a odporúčania. Tiež

by som chcel poďakovať Ivanovi Červeňovi, ktorý ma naučil, že je potrebné venovať náležitú pozornosť výberu pojmov a formulácii viet, aby boli čo najzrozumiteľnejšie a najvýstižnejšie.

Nerovnovážna termodynamika a problematika vedenia tepla sú oblasti výskumu, ktoré boli v minulosti rozvíjané na pracovisku, kde pôsobím. Výraznými osobnosťami a protagonistami týchto tém boli Štefan Barta a Július Krempaský. Obaja boli inšpirujúci vedci a učitelia. Ich myšlienky a práce formovali moje porozumenie tejto oblasti, za čo sa im chcem na tomto mieste poďakovať.

Kapitola 1

Rovnovážna termodynamika

Pri opise prestupu tepla látkou alebo sústavou viacerých telies vychádzame z makroskopických termodynamických veličín ako je napríklad teplota, tlak a aj samotné teplo. Vzťahy medzi zmenami týchto veličín sú do veľkej miery určené prvým a druhým zákonom termodynamickým. Znalosť termodynamiky je preto nevyhnutnou podmienkou na dobré porozumenie problematike prestupu tepla.

Existuje množstvo veľmi dobrých učebníc termodynamiky. Z fyzikálneho aj historického hľadiska sú zaujímavé učebnice A. Sommerfelda [1] a A. B. Piparda [2]. Učebnica Ch. Kittela [3] je populárny kurz najmä medzi študentmi orientovanými na fyziku kondenzovaných látok a fyzikálnu elektroniku, naopak učebnica Atkinsa [4] je populárna medzi študentmi chémie a materiálových vied. Pre študentov orientovaných na energetiku a strojárstvo by mohla byť veľmi zaujímavá učebnica od Pefleyho a Murraya [5]. Nakoniec v slovenskom jazyku možno odporúčať relevantné kapitoly v staršej učebnici D. Ilkoviča [6] alebo novší učebný text od I. Červeňa [7].

1.1 Základné pojmy a predstavy

Objektom štúdia termodynamiky je *makroskopická fyzikálna sústava* nachádzajúca sa v *rovnovážnom stave*. Výsledkami termodynamiky sú vzťahy medzi makroskopickými fyzikálnymi veličinami sústavy v rôznych prípustných rovnovážnych stavoch.

Príklady fyzikálnych sústav sú: (1) plyn molekúl dusíka v Dewarovej nádobe (termoska), (2) voda s ľadom v uzavretej nádobe, ktorej steny majú nemennú teplotu prostredia. Ak voda s ľadom nezaplní celý objem nádoby, potom do tejto sústavy patrí aj vodná para a vzduch vyplňajúci zvyšok objemu nádoby, (3) piezokryštál vyplňajúci priestor medzi elektródami doskového

kondenzátora napájaného zdrojom jednosmerného napätia, (4) permanentný magnet nachádzajúci sa vo vonkajšom magnetickom poli, ktoré vytvára zdroj jednosmerného prúdu. V oboch posledných príkladoch je kryštál aj magnet zároveň v tepelnom a mechanickom kontakte s prostredím.

Aby sa vyššie uvedené príklady dokázali presnejšie klasifikovať, zavádzajú sa v termodynamike viaceré dôležité pojmy. Fyzikálne sústavy nazývame *uzavretými*, ak si nemôžu so svojim okolím vymieňať častice. Príklad (1) predstavuje uzavretú sústavu, ak molekuly dusíka nedokážu difundovať cez steny nádoby a naopak, molekuly okolia nedokážu difundovať cez steny do nádoby. Ak by sme v príklade (2) chceli ako študovanú sústavu uvažovať len vodu v kvapalnom skupenstve, potom takáto sústava by bola *otvorená*, lebo molekuly vody môžu prechádzať medzi plynným, kvapalným a tuhým skupenstvom.

Fyzikálnu sústavu nazývame *izolovanou*, ak je uzavretá a navyše na častice sústavy nepôsobia časovo závislé vonkajšie sily.

Ak na sústavu vonkajšie sily pôsobia, potom z makroskopického hľadiska rozdeľujeme ich účinok na *prenos tepla* a *konanie makroskopickej práce* na sústave¹. Ak nedochádza ku konaniu makroskopickej práce na sústave, potom hovoríme o *mechanicky izolovanej sústave*. Ak nedochádza k prenosu tepla do sústavy, tak hovoríme o *tepelne izolovanej sústave*. Príklad (1) predstavuje (mechanicky aj tepelne) izolovanú sústavu, príklad (2) opisuje mechanicky izolovanú sústavu, ak sa jej steny nemôžu meniť, ale tepelne izolovaná nie je. Jej steny majú nemennú teplotu, čo je typicky zabezpečené okolím – tepelným rezervoárom s nemennou teplotou. Rezervoár tepla dodáva alebo odoberá teplo sústave tak, aby teplota stien ostávala nemenná. Príklady (3) a (4) predstavujú sústavy, ktoré sú (približne) uzavreté ale nie sú izolované. Okrem objemovej práce okolia s daným tlakom vykonáva prácu na sústave aj batéria, ktorá udržiava nemenné elektrické alebo magnetické pole.

Fyzikálne sústavy sú v *rovnovážnom stave*, ak všetky prechodné deje, ktoré mohli nastať pri „zostavení“ sústavy, sa už ustálili a ďalej sa jej všetky makroskopické vlastnosti (teplota, objem, relatívna dielektrická permitivita, elektrická vodivosť, farba, vôňa...) v čase už nemenia. Makroskopické veličiny, ktorých hodnoty vieme *jednoznačne* priradiť vybranému rovnovážnemu stavu sústavy nazývame *stavovými veličinami* alebo aj *stavovými premennými*. Stavové veličiny delíme na *extenzívne* a *intenzívne*. Hodnota extenzívnej veličiny narastá lineárne s množstvom látky aj keď samotný termodynamický stav

¹Pracovná definícia rozdelenia týchto dvoch môže byť takáto: O konaní makroskopickej práce na sústave hovoríme vtedy, ak makroskopická stredná hodnota pôsobiach mikroskopických síl je nenulová a zároveň tieto sily vedú ku zmene strednej hodnoty niektorej z makroskopických fyzikálnych veličín. Naopak, o prestupe tepla hovoríme vtedy, ak stredná hodnota samotných mikroskopických síl je nulová.

látky sa nemení. Naopak, hodnota intenzívnej stavovej veličiny od množstva látky nezávisí.

Príklad intenzívnych stavových veličín pre plyn sú jeho teplota T , tlak p . Medzi extenzívne veličiny patrí celkový objem V , vnútorná energia U či hmotnosť. Pre dielektriká je ich (intenzívnou) stavovou veličinou polarizácia \vec{P} a pre magneticky aktívne látky ich magnetizácia \vec{M} . Ak sa sústava skladá z rôznych typov atómov alebo molekúl, tak stavovými veličinami sú aj ich látkové množstvá n_α , $\alpha = 1, \dots, N_Z$. N_Z nazývame počtom *zložiek* sústavy.

Ak sa v sústave nachádza len jeden typ molekúl/atómov, potom ju nazývame *čistou* látkou (z anglického *pure substance*). Čistá látka sa môže skladať aj z viacerých zložiek, ale ich látkové množstvo musí byť nemenné pri rôznych hodnotách stavových parametrov, t. j. nesmie dochádzať k reakciám alebo ich vyzrážaniu. Typickým predstaviteľom je suchý vzduch.

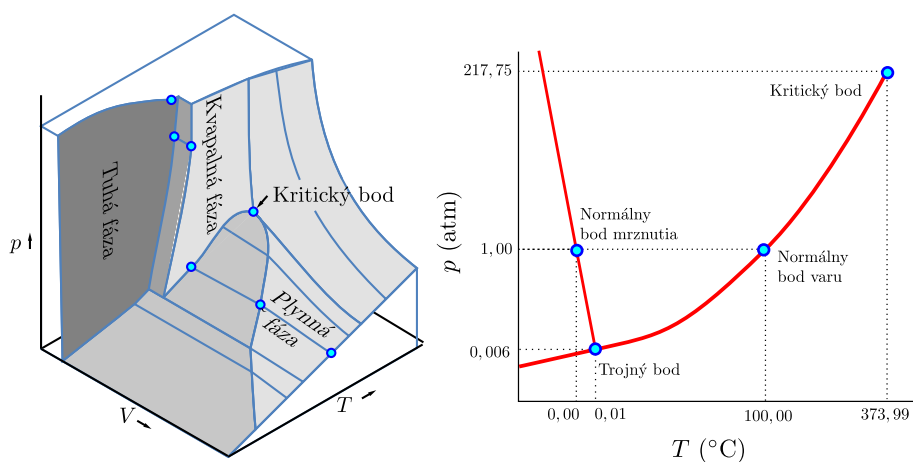
Fázou nazývame taký stav látky, ktorý je z makroskopického hľadiska homogénny, hoci sa môže skladať z viacerých zložiek. Základnú klasifikáciu fáz na plynú, kvapalnú a tuhú možno ďalej rozširovať, napríklad pri tuhých fázach rozlišujeme rôzne kryštalické usporiadania látky, prípadne amorfnú fázu. Magneticky aktívne látky môžu mať magneticky usporiadanú feromagnetickú fázu. Pri látke nachádzajúcej sa v určitej jednoznačnej fáze prepočítavame extenzívne stavové veličiny na jednotku hmotnosti, čím ich zmeníme na intenzívne a označujeme ich prívlastkom *hmotnostná/ý* alebo *špecifický*, napr. hmotnostná vnútorná energia $u = U/m$ alebo špecifický objem² $\mathcal{V} = V/m$.

Uvažujme niekoľko rovnovážnych stavov látky, ktoré označíme indexom $i = 1, 2, 3 \dots$. Nakoľko k rovnovážnemu stavu vieme priradiť hodnotu stavovej veličiny jednoznačne, môžeme aj tieto premenné označiť indexom tohto stavu, napr. T_i, p_i, U_i . Rovnovážne stavy v podobe bodov zobrazujeme vo fázových diagramoch s počtom osí rovnajúcim sa počtu stavových premenných, ktoré nás zaujímajú (Obr. 1.1.1).

Naopak, k danej hodnote jednej stavovej veličiny nevieme vo všeobecnosti jednoznačne priradiť rovnovážny stav sústavy. Pre jednoznačné identifikovanie rovnovážneho stavu potrebujeme určitý počet *nezávislých stavových veličín*. Ich voľba ale nie je jednoznačná a aj ich počet sa môže v priebehu termodynamických zmien meniť.

Gibbsovo pravidlo fáz pomáha určiť počet nezávislých intenzívnych premenných pre sústavu skladajúcu sa z N_Z zložiek nachádzajúcich sa v N_F fázach vo vzájomnej rovnováhe. Celkové množstvo látky v každej z uvažovaných fáz je pritom irelevantné, nakoľko nezávislým navyšovaním množstva látky v ktorejkoľvek z fáz sa ich vzájomná rovnováha nenarúša. Počet nezá-

²Častejšie používaná veličina hustota hmotnosti $\rho = m/V$ predstavuje obrátenú hodnotu špecifického objemu, $\mathcal{V} = 1/\rho$.



Obr. 1.1.1: Typický pVT fázový diagram jednozložkovej sústavy (vľavo) a pT fázový diagram vody (vpravo) pre nemennú hmotnosť látky. Každý bod na ploche v pVT diagrame zodpovedá práve jednému rovnovážnemu stavu sústavy. V pT diagrame vody každý bod v rovine jednoznačne zodpovedá jej rovnovážnemu stavu, s výnimkou stavov na zobrazených krivkách koexistencie dvoch rôznych fáz.

vislých stavových premenných je podľa Gibbsovo pravidla určený vzťahom $N = 2 + N_Z - N_F$. Prvé dve započítané intenzívne stavové premenné sú teplota a tlak. Mólový zlomok každej zo zložiek v každej fáze predstavuje $N_Z N_F$ stavových premenných. Súčet mólových zlomkov všetkých zložiek v ktorejkoľvek fáze sa rovná jedna, čo predstavuje N_F rovníc, ktoré znižujú počet nezávislých premenných o N_F . Nakoniec uvažíme, že molekuly určitej zložky nebudú systematicky prechádzať medzi rôznymi fázami len vtedy, ak bude chemický potenciál³ tejto zložky vo všetkých fázach rovnaký. Toto predstavuje $(N_F - 1)N_Z$ rovníc, a teda tomu zodpovedajúci pokles nezávislých stavových premenných. Ak zlúčime všetky tieto úvahy, nachádzame Gibbsov vzťah $N = 2 + N_Z N_F - N_F - (N_F - 1)N_Z = 2 + N_Z - N_F$.

Napríklad pre vodu (čistá látka, $N_Z = 1$) nachádzajúcu sa v sústave v kvapalnej aj plynnej fáze ($N_F = 2$) nachádzame $N = 1$ a preto zadaním teploty je už jednoznačne určený tlak aj ostatné veličiny v takejto sústave (krivka nasýtenej pary).

Pri výbere nezávislých stavových veličín sa riadime experimentálnymi pozorovaniami. Pre plyn pozostávajúci z jedného druhu molekúl potrebujeme

³Chemický potenciál je intenzívna stavová veličina, ktorú presne zavedieme v kapitole 1.3. Tvrdenie, že rovnosť chemického potenciálu zložky v dvoch fázach je podmienkou ich rovnováhy, odvodíme v kapitole 1.5.

na jednoznačné určenie rovnovážneho stavu tri stavové veličiny, napríklad teplotu, objem a látkové množstvo plynu. Pokiaľ si plyn sústavy nemôže vymieňať molekuly s rezervoárom častíc, t. j. predstavuje uzavretú sústavu, je jeho látkové množstvo v rámci uvažovaných termodynamických zmien nemenné. S takouto situáciou sa často implicitne uvažuje, a preto sa zvykne hovoriť len o dvoch nezávislých stavových veličinách, bez explicitného uvedenia látkového množstva, ktoré sa považuje za konštantné.

Príklad 1.1.1 *Ideálny plyn a závislosť vnútornej energie len od teploty.* Stav daného množstva ideálneho plynu môžeme určiť zadaním jeho teploty a objemu, no rovnako dobre by nám poslúžili aj teplota a tlak alebo vnútorná energia a objem. Na druhej strane, zadanie teploty a vnútornej energie nie je postačujúce, nakoľko vzťah medzi nimi nie je závislý od tlaku alebo objemu plynu. Akonáhle by ale plyn nebol ideálny, jeho vnútorná energia by bola závislá aj od jeho objemu a striktné vzaté, teplota a vnútorná energia by mohli byť dvoma nezávislými stavovými veličinami, aj keď dosť nepraktickými. Táto závislosť je v praxi totiž dosť slabá a aj relatívne veľká zmena objemu vedie len k malej zmene vnútornej energie (pri nemennej teplote).

Príklad 1.1.2 *Príklad viaczložkovej sústavy.* V prípade sústavy vody a vzduchu v uzavretej nádobe sú stavovými veličinami okrem teploty, objemu nádoby a látkových množstiev vody n_{voda} a vzduchu n_{vzduch} aj látkové množstvo vody v kvapalnom skupenstve $n_{\text{voda,k}}$ a látkové množstvo vody v plynnom skupenstve $n_{\text{voda,p}}$ (vodná para). Tieto dve posledné ale nie sú nezávislými stavovými veličinami. Molekuly vody a vzduchu môžu voľne prechádzať medzi kvapalným a plynným skupenstvom a relatívne rozdelenie látkových množstiev sa nastaví v rovnovážnom stave spontánne. Preto napríklad množstvo vody v plynnom skupenstve bude funkciou nevyhnutného počtu stavových veličín, určujúcich rovnovážny stav jednoznačne,

$$n_{\text{voda,p}} = f(T, V, n_{\text{voda}}, n_{\text{vzduch}}) \quad (1.1.1)$$

$$n_{\text{voda,k}} = n_{\text{voda}} - n_{\text{voda,p}} \quad (1.1.2)$$

Pri využití Gibbsovho pravidla fáz pre tento prípad uvažujeme rovnovážnu sústavu látky v kvapalnej a plynnej fáze ($N_F = 2$), pričom hmotnosť každej fázy je jednotková. V každej fáze sa môžu nachádzať molekuly vody aj vzduchu, t. j. dve zložky, $N_Z = 2$. Sústava dvoch fáz s dvoma zložkami má teda len $N = 2 + 2 - 2 = 2$ nezávislé intenzívne stupne voľnosti, napríklad teplotu T a mólový zlomok molekúl vody v plynnej fáze $x_{\text{voda,p}}$. Všetky ostatné intenzívne veličiny oboch fáz, ako napríklad mólový zlomok vzduchu v kvapalnej fáze $x_{\text{vzduch,k}}$, alebo hustota plynnej fázy ρ_p , sú zadaním dvoch nezávislých stupňov voľnosti určené.

Rovnováha sústavy nebude narušená pre akékoľvek množstvo fázy v kvapalnom stave, dané napríklad hmotnosťou m_k a akékoľvek množstvo plynnej fázy, dané hmotnosťou m_p , pokiaľ ich intenzívne veličiny budú nemenné. Tieto dve hmotnosti predstavujú dodatočné dva stupne voľnosti pre konkrétnu sústavu. Pre pôvodne uvažovaný problém v tomto príklade máme ale predpísaný celkový objem $V = m_k/\rho_k + m_p/\rho_p$, a teda len jednu z m_k a m_p môžeme voľiť nezávisle. Celkovo nachádzame teda štyri nezávislé stavové veličiny sústavy: T , $x_{\text{voda,p}}$, V a m_k . Z nich môžeme vyjadriť aj inú kombináciu štyroch nezávislých stavových veličín, ktorá viac vyhovuje experimentálnej situácii. Napríklad T , V , n_{voda} a n_{vzduch} sme použili vo vyjadreniach vyššie.

Príklad 1.1.3 *Nejednoznačnosť na krivke koexistencie fáz.* V stave koexistencie látky v dvoch rôznych skupenstvách nie je rovnovážny stav sústavy jednoznačne určený tlakom a teplotou (Obr. 1.1.1). Pre zvolenú kombináciu teploty a tlaku totiž môžeme nájsť rôzne rovnovážne stavy, líšiace sa látkovým množstvom látky v jednom a druhom skupenstve. Pri zmenšení celkového objemu sústavy, ktorá je v kontakte s teplotným rezervoárom, časť látky zmení skupenstvo, pričom teplota aj tlak ostane nezmenené. Dvoma nezávislými a na určenie stavu jednoznačnými stavovými veličinami v takomto režime môžu byť teplota a objem.

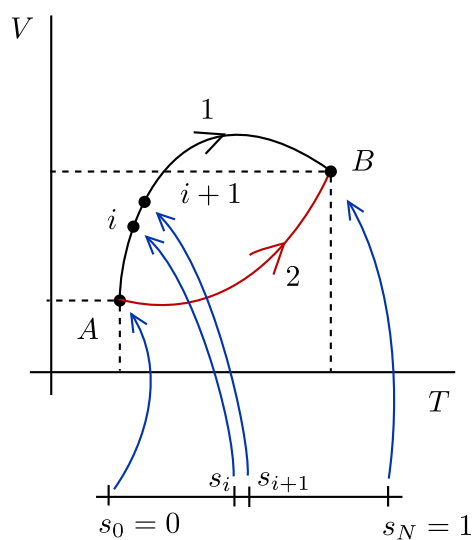
Ak sústava v dôsledku konania práce prejde zo stavu A do stavu B, potom stavové veličiny sa zmenia o hodnoty $\Delta T_{B,A} = T_B - T_A$, $\Delta V_{B,A} = V_B - V_A$ atď. Túto zmenu môžeme zrealizovať prechodom cez mnoho infinitezimálne odlišných rovnovážnych stavov $i = 0, \dots, N$, ktoré charakterizujeme reálnym parametrom s : $s_0 = 0$, $s_N = 1$ (Obr. 1.1.2). V limite $N \rightarrow \infty$ hodnoty stavových parametrov T_i , V_i, \dots prejdú na funkcie (parametrizácie) $T(s)$, $V(s)$ pre $s \in (0,1)$. Takúto zmenu rovnovážneho stavu z A do B nazývame *vratný dej* (niekedy aj *rovnovážny dej*, čo znie trochu ako básnický prívlastok vzhľadom na svoju rozporupnosť) a reprezentujeme ho krivkou vo fázovom priestore. Ako názov vratného deju napovedá, je možné, aby sústava prechádzala pozdĺž krivky vratného deju v oboch smeroch, t. j. z A do B alebo aj naopak z B do A.

Pri prechode zo stavu i do $i + 1$, t. j. pri zmene parametru $\Delta s = s_{i+1} - s_i$ sa zmenia stavové veličiny takto

$$T(s_{i+1}) - T(s_i) \approx T(s_i) + \frac{dT}{ds} \Delta s - T(s_i) = \frac{dT}{ds} \Delta s \quad (1.1.3)$$

$$V(s_{i+1}) - V(s_i) \approx V(s_i) + \frac{dV}{ds} \Delta s - V(s_i) = \frac{dV}{ds} \Delta s \quad (1.1.4)$$

⋮



Obr. 1.1.2: Rovnovážny dej, pri ktorom sústava prejde zo stavu A do stavu B môžeme realizovať ako sériu mnohých blízkych rovnovážnych stavov i . Trajektóriu môžeme parametrizovať pomocou skalárneho parametra s . Dej možno realizovať mnohými spôsobmi, napríklad pozdĺž krivky 1 alebo 2.

Celkovú zmenu stavovej veličiny, napríklad teploty, pri zmene rovnovážneho stavu z A do B môžeme potom vyjadriť pomocou integrálu po krivke v stavovom priestore

$$T_B - T_A = \sum_{i=0}^N T(s_{i+1}) - T(s_i) = \int_0^1 \frac{dT}{ds} ds = \int_A^B dT. \quad (1.1.5)$$

Výsledok nezávisí od voľby stavov $i = 1, \dots, N$, cez ktoré prechádzame, pretože teplota *je* stavovou veličinou.

Neskôr uvidíme, že 1. zákon termodynamický tvrdí, že aj vnútorná energia je stavovou veličinou. Ak by sme chceli poznať zmenu vnútornej energie plynu pri zmene rovnovážneho stavu z A do B, pričom za stavové veličiny sme zvolili T a V , potom vnútorná energia bude jednoznačnou funkciou T a V a pre jej zmenu pozdĺž zvolenej krivky nájdeme

$$U_B - U_A = \sum_i U(T(s_{i+1}), V(s_{i+1})) - U(T(s_i), V(s_i)) \quad (1.1.6)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial T} \frac{dT}{ds} + \frac{\partial U}{\partial V} \frac{dV}{ds} \right) ds = \int_A^B dU, \quad (1.1.7)$$

opäť výsledok nezávislý od voľby krivky vo fázovom priestore, pretože aj vnútorná energia *je* stavovou veličinou.

Naposledy uvedená rovnosť sa často v termodynamike píše v infinitezimálnom tvare a bez nepodstatného prírastku parametra ds ,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV \quad (1.1.8)$$

a komentuje sa slovami, že vnútorná energia je *úplný diferenciál* premenných teploty a objemu.

V prípade, keď nechceme byť špecifický ohľadom výberu M nezávislých stavových veličín, môžeme pre ne použiť označenie $\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots, x_M$ a diferenciál vnútornej energie napísať v tvare

$$dU = \sum_{i=1}^M \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x}. \quad (1.1.9)$$

Kruhovým alebo cyklickým dejom nazývame taký dej, počas ktorého sa sústava vráti do identického rovnovážneho stavu. V prípade, keď ide o vratný kruhový dej, vieme ho znázorniť ako krivku vo fázovom priestore. Pre kruhový vratný dej platí pre ľubovoľnú stavovú veličinu X vzťah

$$\oint dX = 0. \quad (1.1.10)$$

Toto je ekvivalentné tvrdeniu, že infinitezimálny prírastok veličiny X , t. j. dX predstavuje úplný diferenciál.

Úloha 1.1.4 Môže sa rovnovážny stav sústavy spontánne zmeniť na iný rovnovážny stav? Ako by sme túto zmenu spozorovali? Existujú vôbec nejaké fyzikálne veličiny, ktoré sa môžu v rovnovážnom stave sústavy spontánne meniť?

Úloha 1.1.5 Ktoré dve stavové veličiny *vždy* postačujú na jednoznačné určenie rovnovážneho stavu 1 kg molekúl N_2 ? Fázový diagram tejto látky je kvalitatívne daný grafom vľavo na Obr. 1.1.1.

Vyberte z možností: (a) p, T ; (b) p, V ; (c) V, T .

Úloha 1.1.6 Napíšte vzťah pre diferenciál vnútornej energie ako funkcie stavových veličín p, T a n . Čomu sa rovná M použité v rovnici (1.1.9) v tomto prípade? Bude derivácia násobiaca prírastok teploty dT v tomto výraze pre určitú konkrétnu látku rovnaká ako bola vo vzťahu (1.1.8)? Prečo nie?

1.2 Práca

Definíciu pre prácu, ktorú koná sila \vec{F} , poznáme z mechaniky:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad (1.2.1)$$

kde vonkajšia sila \vec{F} pôsobí v mieste, ktoré sa posunie o vektor posunutia $d\vec{r}$. V prípade, keď pôjde len o infinitezimálne malé posunutie, a teda o infinitezimálne malú prácu, budeme písať

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1.2.2)$$

Uvedený výraz určuje prácu všeobecne, aj pre deje, pre ktoré nedokážeme okamžitý stav sústavy opísať pomocou malého počtu stavových parametrov. Na jej vyčíslenie musíme poznať silu, ktorá pôsobí a miesto jej pôsobiska ako funkcie času. Na druhej strane, pri riešení problémov v termodynamike sa stretávame s rôznymi vyjadreniami práce pomocou hodnôt a zmien stavových veličín sústavy. V týchto prípadoch hovoríme o *rovnovážnej* alebo *vratnej* práci. Konanie rovnovážnej práce musí prebiehať veľmi pomaly, aby sa sústava v každom okamihu času nachádzala v aktuálnom rovnovážnom

stave. Ak dej prebieha konečnou rýchlosťou a vyjadrenie práce len pomocou stavových veličín nie je možné, potom hovoríme o *nerovnovážnej práci*.

Príklad 1.2.1 Pre izotropnú stlačiteľnú látku možno odvodiť z definície (1.2.2) vzťah pre objemovú prácu

$$\delta W = -p_0 dV, \quad (1.2.3)$$

kde p_0 je tlak v rezervoári, ktorý koná prácu na sústave tak, že jej objem narastie o dV . Tlak rezervoáru pritom nemusí byť totožný s tlakom v sústave. Pre dej prebiehajúci konečnou rýchlosťou, t. j. nerovnovážne, bude tlak v rezervoári vyšší ako je tlak v sústave, ak chceme objem sústavy zmenšiť. Pri veľkej rýchlosti deja nemusí byť tlak v sústave ani dobre definovaný. Ak ale dej prebieha tak pomaly, že v každom okamihu času sa sústava nachádza v rovnováhe s rezervoárom, t. j. pôjde o rovnovážny dej, potom bude mať aj sústava dobre definovanú stavovú veličinu tlak $p = p_0$ a prácu môžeme vyjadriť len pomocou stavových veličín sústavy a ich zmien,

$$\delta W = -pdV, \quad (1.2.4)$$

t. j. pôjde o rovnovážnu prácu.

Príklad 1.2.2 Ak termodynamickú sústavu predstavuje dielektrický materiál vložený do elektrického poľa \vec{E} v kondenzátore, je práca, ktorú koná zdroj poľa na dielektriku

$$\delta W = U_Z \delta q = \int \vec{E} \cdot \delta \vec{P} dV, \quad (1.2.5)$$

kde U_Z je napätie zdroja, ktorý pole vytvára, δq je množstvo náboja *prineseného* zdrojom z jednej dosky kondenzátora na druhú a \vec{P} je okamžitý vektor polarizácie dielektrika (pozri úlohu 1.2.5). Podobne ako pri objemovej práci, aj práca zdroja napätia môže byť vykonaná rovnovážne – pomalým nárastom napätia zdroja tak, aby sa náboj presúval pomaly, aj nerovnovážne – okamžitým zapnutím napätia vedúceho na rôzne prechodné javy, ako sú napríklad oscilácie elektrických dipólov. V prípade vratného deja sa polarizácia \vec{P} stáva stavovou veličinou, ktorá charakterizuje stav dielektrického materiálu. Ak je v objeme materiálu V pole homogénne, polarizácia nebude závisieť od miesta a výraz pre rovnovážnu prácu nadobudne tvar $\delta W = V \vec{E} \cdot d\vec{P}$.

Príklad 1.2.3 Ak je súčasťou sústavy odporový elektrický vodič, potom zdroj napätia s napätím U_Z , ktorý je pripojený na vodič, na sústave koná

prácu

$$W = \int_0^T U_Z I(t) dt = U_Z \Delta q \quad (1.2.6)$$

kde $I(t)$ je okamžitý elektrický prúd a Δq je celkový *prenesený* náboj cez sústavu. Nejde teda o stavovú veličinu – tento náboj sa v sústave neakumuluje, jej stav nezávisí od množstva náboja, ktorý ňou pretekol, a preto ide o nerovnovážnu prácu.

Úloha 1.2.4 Odvodte vzťah (1.2.3) z definičného vzťahu pre prácu (1.2.2) pomocou modelu plynu v nádobe s posuvným piestom s veľkosťou plochy S pri jeho posúvaní v dôsledku rezervoáru tlaku s tlakom p_0 na druhej strane priehradky piestu.

Úloha 1.2.5 Nájdite vyjadrenie pre prácu, ktorú koná zdroj konštantného napätia na dielektrickom materiáli uloženom v rovinnom doskovom kondenzátore. Materiál je charakterizovaný polarizáciou P , veľkosť plochy dosiek je S a ich vzdialenosť je h .

Riešenie: Prácu, ktorú koná zdroj napätia nájdeme ako súčin napätia zdroja a celkového náboja Δq , ktorý dodá zdroj kondenzátoru,

$$\Delta W = U_Z \Delta q. \quad (1.2.7)$$

Ak sa z nejakého dôvodu zmení veľkosť polarizácie o ΔP , zmení sa veľkosť indukovaného viazaného náboja na povrchu dielektrika o $\Delta q_{\text{viaz}} = \Delta \vec{P} \cdot \vec{S} = \pm \Delta P S$, kde S je veľkosť plôch dielektrika dotýkajúcich sa dosiek kondenzátora. Napätie U_Z , a teda aj veľkosť intenzity elektrického poľa $E = U_Z/h$ v dielektriku udrží zdroj konštantným tak, že zmenu veľkosti viazaného náboja Δq_{viaz} vykompenzuje dodaním náboja $\Delta q = \Delta q_{\text{viaz}}$ na kovové dosky kondenzátora. Vykoná pri tom prácu, ktorú možno vyjadriť pomocou konečnej zmeny stavovej veličiny dielektrika – polarizácie P ,

$$\Delta W = U_Z \Delta q = E h \Delta q_{\text{viaz}} = E \Delta P V \quad (1.2.8)$$

kde $V = Sh$ je objem dielektrika v kondenzátore. Elementárna práca na dielektriku s jednotkovou hmotnosťou bude teda

$$dw = \rho E dP. \quad (1.2.9)$$

kde ρ je hustota dielektrika.

1.3 Prvý zákon termodynamický

Prvý zákon termodynamický tvrdí, že (1) *vnútorná energia* fyzikálnej sústavy v rovnovážnom stave je *stavovou veličinou* a (2) energia sa počas termodynamického deja zachováva. Pre zapísanie 1. zákona v tvare rovnice je užitočné postupne uvažovať sústavu tepelne izolovanú, neizolovanú ale uzavretú a nakoniec otvorenú.

V prípade tepelne izolovanej sústavy formuluje A. B. Pippard prvý zákon takto [2]: „Ak sa rovnovážny stav izolovanej sústavy zmení v dôsledku pôsobenia makroskopických vonkajších síl, potom výsledné množstvo práce týchto síl je závislé len od počiatočného a koncového rovnovážneho stavu sústavy a nie od spôsobu akým je táto práca vykonaná alebo od prechádzaných stavov sústavy, ktorými sústava počas dejú prechádza.“ Uvedený citát špecifikuje tvrdenie, že vnútorná energia je stavovou veličinou. Pre tepelne izolovanú sústavu možno jej vnútornú energiu meniť len konaním práce, a preto môžeme v tomto prípade písať

$$\Delta U = W. \quad (1.3.1)$$

Ak sústava nie je tepelne izolovaná, potom z experimentov vieme, že nárast jej vnútornej energie pri zmene stavu nie je vo všeobecnosti rovný práci vonkajších makroskopických síl. Vzhľadom na všeobecný zákon zachovania energie musí potom platiť

$$\Delta U = W + Q, \quad (1.3.2)$$

kde Q sa nazýva teplo, ktoré je sústave dodané a jeho hodnota je akurát taká, že zákon zachovania energie bude splnený. Z mikroskopického pohľadu aj teplo predstavuje konanie práce vonkajšími silami, napr. pôsobením atómov nepatriacich do študovanej sústavy na atómy sústavy, no nedokážeme ho zapísať pomocou *makroskopických* vzťahov známych z mechaniky alebo elektromagnetizmu. Keďže prestup tepla je hlavnou témou tejto učebnice, metodikou jeho výpočtu sa budeme zaoberať prakticky v každej kapitole.

Ak uvažujeme infinitezimálnu zmenu stavu, zapisujeme rovnicu (1.3.2) v tvare

$$dU = \delta W + \delta Q. \quad (1.3.3)$$

Na rozdiel od vnútornej energie, prijaté teplo δQ a vykonaná práca δW *nie* sú úplné diferenciály stavových premenných⁴. Z tohto dôvodu ich prírastky

⁴To, že infinitezimálna práca nie je úplný diferenciál, možno vidieť aj z konkrétnych príkladov na jej výpočet, napr. pre objemovú prácu platí $\delta W = -p(T,V)dV$.

označujeme symbolmi δ a nie pomocou symbolu „d“. Vďaka tomu, že práca a teplo nie sú stavové veličiny môžu látky v termodynamickom kruhovom deji konať nenulovú prácu,

$$\oint \delta W \neq 0. \quad (1.3.4)$$

Prvý zákon termodynamický opisuje zmenu vnútornej energie medzi dvoma rovnovážnymi stavmi, ktorá sa môže realizovať rovnovážne i nerovnovážne. Nerovnovážnu zmenu si predstavujeme ako reálny fyzikálny dej, prebiehajúci v konečnom čase v dôsledku pôsobenia externých (mikroskopických aj makroskopických) síl.

Nakoniec nájdeme formuláciu prvého zákona pre otvorenú sústavu, t. j. takú, ktorá si so svojim okolím môže vymieňať aj častice. Na rozdiel od konania práce alebo výmeny tepla, výmena častíc nepredstavuje spojitý proces v čase. Naopak, v určitom okamihu patrí do sústavy N častíc, a v ďalšom okamihu je ich $N + 1$, pričom táto zmena nie je opísaná mikroskopickými pohybovými rovnicami, ale našou predstavou toho, kde sa nachádza myšlená hranica sústavy.

Predstavme si, že konaním práce W_{1+2} spojíme dve izolované sústavy s vnútornými energiami U_1 a U_2 a látkovými množstvami n_1 a n_2 a nech \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 sú ďalšie stavové veličiny, ktoré spolu s n_1 alebo n_2 jednoznačne určujú rovnovážny stav oddelených sústav. Vzhľadom na zákon zachovania energie, vzniknutá spojená sústava bude mať vnútornú energiu $U = U_1 + U_2 + W_{1+2}$ a látkové množstvo $n = n_1 + n_2$. Zvyšné stavové veličiny nevyhnutné na jednoznačné určenie rovnovážneho stavu spojenej sústavy označíme ako $\mathbf{x} = (T, V, \dots)$. Podľa prvého zákona je vnútorná energia stavovou veličinou, a preto bude existovať funkcia, ktorá priradí n a \mathbf{x} jej hodnotu U , t. j. $U(n, \mathbf{x})$. Obdobne to bude platiť pre oddelené sústavy pred ich spojením, t. j. budú existovať funkcie $U_1(n_1, \mathbf{x}_1)$ a $U_2(n_2, \mathbf{x}_2)$. Zo zákona zachovania energie teda nachádzame,

$$U(n_1 + n_2, \mathbf{x}) = U_1(n_1, \mathbf{x}_1) + U_2(n_2, \mathbf{x}_2) + W_{1+2}. \quad (1.3.5)$$

Identifikujme teraz spojenú sústavu so sústavou 1 v tom zmysle, že obe majú rovnako zavedené stavové premenné, no líšia sa ich konkrétnou numericou hodnotou, čo zapíšeme pomocou priradenia $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}'$, $n_1 \rightarrow n$ a $U_1 \rightarrow U$. Uvažujme ďalej, že látkové množstvo $n_2 \ll n$, a preto ho označíme ako malý prírastok dn látkového množstva n sústavy 1 pred spojením. S týmito označeniami prepíšeme zákon zachovania energie do tvaru

$$U(n + dn, \mathbf{x}) = U(n, \mathbf{x}') + U_2(dn, \mathbf{x}_2) + \delta W_{1+2}. \quad (1.3.6)$$

alebo pre prírastok vnútornej energie sústavy 1 (\equiv spojenej sústavy)

$$dU = U(n + dn, \mathbf{x}) - U(n, \mathbf{x}') = U_2(dn, \mathbf{x}_2) + \delta W_{1+2}. \quad (1.3.7)$$

Ak budeme predpokladať, že v dôsledku infinitezimálnej zmeny počtu molov sa budú výsledné hodnoty ostatných rovnovážnych stavových parametrov líšiť len infinitezimálne, $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + d\mathbf{x}$, potom môžeme pre vnútornú energiu použiť Taylorov rozvoj a nájdeme

$$U(n, \mathbf{x}') \approx U(n, \mathbf{x}) - \left. \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \right|_n \cdot d\mathbf{x} + \dots \quad (1.3.8)$$

Dosadením (1.3.8) do (1.3.6) a zavedením parciálnej derivácie vnútornej energie podľa počtu molov pri konštantných ostatných stavových parametroch

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\mathbf{x}} = \frac{U(n + dn, \mathbf{x}) - U(n, \mathbf{x})}{dn} \quad (1.3.9)$$

dostaneme,

$$dU = \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\mathbf{x}} dn + \left. \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \right|_n \cdot d\mathbf{x} \quad (1.3.10)$$

Druhý člen na pravej strane predstavuje infinitezimálnu zmenu vnútornej energie pri ľubovoľnej zmene rovnovážneho stavu pri nemennom počte molov, a preto ju môžeme vyjadriť pomocou prvého zákona pre uzavretú sústavu pomocou práce a tepla,

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \right|_n \cdot d\mathbf{x} = \delta Q + \delta W. \quad (1.3.11)$$

Nakoniec použitím rovníc (1.3.10) a (1.3.11) nájdeme matematický zápis prvého zákona pre otvorenú sústavu,

$$dU = \delta Q + \delta W + \mu dn \quad (1.3.12)$$

kde $\mu = \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\mathbf{x}}$ sa nazýva *chemický potenciál* sústavy. Vzhľadom na platnosť vzťahu (1.3.11) zapisujeme definíciu chemického potenciálu aj v tvare

$$\mu = \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\delta Q=0, \delta W=0}. \quad (1.3.13)$$

V prípade, že sa sústava skladá z M zložiek charakterizovaných látkovými množstvami n_α , $\alpha = 1, \dots, M$, potom možno uvedený postup priamočiaro zovšeobecniť s výsledkom pre matematický zápis prvého zákona

$$dU = \delta Q + \delta W + \sum_{\alpha=1}^M \mu_\alpha dn_\alpha, \quad (1.3.14)$$

kde chemický potenciál zložky α v uvažovanej sústave je definovaný vzťahom

$$\mu_\alpha = \left. \frac{\partial U}{\partial n_\alpha} \right|_{\delta Q = \delta W = \delta n_1 = \dots = \delta n_M = 0}, \quad (1.3.15)$$

pričom δn_α je v uvedenej sérii rovností nule vynechané.

Úloha 1.3.1 Opíšte modifikácie prvého zákona termodynamického vyjadreného rovnicou 1.3.14 pre (a) uzavretú sústavu, (b) mechanicky izolovanú sústavu, (c) tepelne izolovanú sústavu a (d) izolovanú sústavu.

Úloha 1.3.2 Zamyslite sa nad bilanciou vnútornej energie pri experimente, ktorým Joule dokázal mechanickú ekvivalenciu tepla. Známe množstvo vody má teplotu zhodnú s teplotou okolia a je uzavreté v tepelne izolovanej nádobe. Vo vode za nachádza vrtuľa, ktorá je roztáčaná prostredníctvom kladky klesajúcim pohybom závažia v gravitačnom poli. Keď závažie poklesne na najnižšiu prístupnú výšku a pohyb vody sa ustáli, voda nebude v rovnakom termodynamickom stave ako na začiatku. Aká bude veľkosť a znamienko nárastu vnútornej energie vody? Nakoniec odstránime tepelnú izoláciu a voda sa vráti do rovnovážneho stavu, v ktorom sa nachádzala na začiatku. Aká bude veľkosť a znamienko tepla, ktoré voda prijala po odstránení tepelnej izolácie?

1.4 Druhý zákon termodynamický

Uvažujme dve izolované sústavy, každú vo svojom rovnovážnom stave, ktoré po uvedení do vzájomného *teplného* kontaktu prejdú do nového rovnovážneho stavu spojenej sústavy. Spojená sústava je izolovaná od okolia, a preto zmena celkovej vnútornej energie musí byť nulová,

$$dU = dU_1 + dU_2 = 0 \rightarrow dU_1 = -dU_2. \quad (1.4.1)$$

Pretože sústavy 1 a 2 sme uviedli len do tepelného kontaktu, bude práca konaná prvou sústavou na druhej alebo naopak nulová a uvedené prírastky vnútornej energie jednotlivých sústav zodpovedajú podľa prvého zákona vymenenému teplu,

$$dU_1 = \delta Q_1 \text{ a } dU_2 = \delta Q_2. \quad (1.4.2)$$

Ak $dU_1 > 0$, potom prijaté teplo prvou sústavou bolo tiež kladné ($\delta Q_1 > 0$) a hovoríme, že prvá sústava bola na začiatku chladnejšia lebo teplo prijala.

Z rovníc (1.4.1) a (1.4.2) vyplýva, že v tomto prípade musí platiť $dU_2 < 0$, a o druhej sústave hovoríme, že pred spojením sústav bola teplejšia, lebo teplo odovzdala. V hraničnej situácii, keď $dU_1 = dU_2 = 0$ hovoríme, že sústavy boli pred kontaktom rovnako teplé. V tomto prípade tepelný kontakt nevedie k zmene rovnovážneho stavu dvoch pôvodne oddelených sústav. Pozorovanie, že ustanovením tepelného kontaktu sústavy spejú spontánne k rovnako teplému stavu predstavuje jednu z formulácií druhého zákona termodynamického.

Uvedomme si, že pojmy „teplejšia sústava“ a „chladnejšia sústava“ nezávisia od definície teploty, aj keď pre Celziovu aj Kelvinovu stupnicu platí, že teleso teplejšie má vyššiu hodnotu teploty ako teleso chladnejšie. Na druhej strane, uvedená úvaha vedie na definíciu stavovej veličiny teploty, ktorá má pre dve rovnako teplé sústavy, t. j. sústavy vo vzájomnej rovnováhe, rovnakú hodnotu. Takto empiricky zavedená teplota sa formálne postuluje v rámci *nultého zákona termodynamického*: „Existuje stavová veličina teplota, ktorej rovnosť pre dve sústavy je nevyhnutnou podmienkou, že sústava, ktorá predstavuje ich zjednotenie, sa nachádza v rovnovážnom stave.“ [1]. Bližšie sa k procesu spájania sústav a nasledujúceho ustálenia rovnovážneho stavu vrátíme v časti 1.5.

Aby sme mohli druhý zákon sformulovať aj matematicky, rozoberieme najprv niekoľko dôsledkov prvého zákona termodynamického pre uzavretú sústavu. Nakoľko podľa prvého zákona je vnútorná energia stavová veličina, je jednoznačnou funkciou potrebného počtu stavových parametrov $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$. Môžeme teda pre jej diferenciál písať

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \sum_{i=2}^M \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i, \quad (1.4.3)$$

kde sme samostatne vydělili parameter x_1 , ktorého hodnota sa zmení po utvorení len tepelného kontaktu s inou sústavou (t. j. bez konania rovnovážnej práce) a parametre $x_i, i = 2, \dots, M$, zodpovedajúce rôznym príspevkom k rovnovážnej práci δW_R . Pri tepelnom kontakte bude teda $dx_i = 0$, a teda aj $\delta W_R = 0$. Vydelený stavový parameter x_1 sa nazýva *entropia* sústavy a jeho štandardné označenie je S . Neskôr uvidíme⁵, že $\partial U / \partial x_1 \equiv \partial U / \partial S$ má význam absolútnej termodynamickej teploty T , a preto diferenciál vnútornej energie možno napísať v tvare

$$dU = T dS + \delta W_R. \quad (1.4.4)$$

⁵V tomto momente môžeme vziať vzťah $T = \partial U / \partial S|_{x_i}$ ako definíciu absolútnej termodynamickej teploty a neskôršie využívanie tejto definície ukáže, že takto zavedené T sa zhoduje s termodynamickou teplotou definovanou pomocou ideálnej účinnosti Carnotovho cyklu, a teda aj zodpovedá absolútnej teplote, ktorá vystupuje napríklad v stavovej rovnici ideálneho plynu.

Nakoľko $x_1 = S$ a $x_i, i = 2, \dots, M$ jednoznačne určuje rovnovážny stav sústavy, musí byť samozrejme takto zavedená teplota funkciou týchto stavových parametrov, $T(S, x_2, \dots, x_M)$.

Vnútoraná energia je *extenzívna veličina*, t. j. napr. dvojnásobné látkové množstvo v tom istom rovnovážnom stave má dvojnásobnú vnútornú energiu. Preto aj súčin TdS musí byť prírastkom extenzívnej veličiny. Vzhľadom na to, že T má význam termodynamickéj teploty, t. j. veličina, ktorá nie je extenzívna (dvojnásobné látkové množstvo v tom istom rovnovážnom stave má tú istú teplotu), musí byť extenzívnou veličinou entropia.

Z rovnosti (1.4.4) môžeme priamo vyjadriť diferenciál entropie

$$dS = \frac{1}{T}dU - \frac{1}{T}\delta W_R = \frac{\delta Q}{T} + \frac{\delta W - \delta W_R}{T}, \quad (1.4.5)$$

kde sme pri úprave použili prvý zákon na vyjadrenie nárastu vnútornej energie pomocou tepla a práce (1.3.3).

Ak chceme doceliť, aby sústava prešla z jedného rovnovážneho stavu do druhého, musia vonkajšie sily konať prácu δW , ktorá okrem rovnovážnej časti δW_R zahŕňa aj rôzne formy nevratnej práce δW_N ako je prekonávanie trenia, Ohmické straty a podobne. Zo skúseností (a množstva experimentov) očakávame, že bude platiť $\delta W_N = \delta W - \delta W_R \geq 0$. Z tejto úvahy prichádzame k *matematickej formulácii druhého zákona termodynamického* v tvare

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (1.4.6)$$

Druhý zákon teda pripúšťa iba také reálne termodynamické zmeny, ktoré spĺňajú túto nerovnosť. V špeciálnom prípade tepelne izolovanej sústavy ($\delta Q = 0$) tento zákon hovorí, že zmena entropie v deji musí byť kladná, t. j. entropia musí narastať. Izolovaná sústava v rovnovážnom stave má teda maximálnu entropiu, ktorá už viac narastať nedokáže.

Nerovnosť (1.4.6) sme motivovali pomocou nevyhnutnej prítomnosti kladnej nevratnej práce, nakoľko sme uvažovali prechod z jedného rovnovážneho stavu sústavy do druhého, čo možno realizovať len pomocou pôsobenia vonkajších síl. Uvedená nerovnosť má ale širšiu platnosť. Napríklad pri vytvorení tepelného kontaktu medzi dvoma sústavami v príklade na začiatku tejto kapitoly, má spojená sústava po ustálení vyššiu entropiu ako je súčet entropií dvoch pôvodne oddelených sústav, aj keď žiadna práca, a teda ani nevratná, nebola pri vytvorení kontaktu konaná. V takomto prípade nie je počiatočný stav, striktno hovoriac, rovnovážnym stavom. Oddelené sústavy totiž nie sú vzájomne v rovnováhe. Zákon narastania entropie ale aj v takomto prípade platí.

Entropia má mikroskopickú interpretáciu miery neusporiadanosti sústavy, a preto druhý zákon možno interpretovať ako zákon narastania neusporiadania v makroskopických fyzikálnych sústavách. Bližšie sa s touto interpretáciou možno oboznámiť v kurzoch štatistickej fyziky [3, 8].

Ak budeme konať na sústave rovnovážnu prácu δW_R , t. j. dej bude dostatočne pomalý a bude pritom dochádzať k výmene tepla δQ_R s okolím, bude sústava prechádzať cez sériu rovnovážnych stavov a pre zmenu jej entropie bude na základe rovnice 1.4.5 platiť

$$dS = \frac{\delta Q_R}{T}. \quad (1.4.7)$$

Využitím tohto vyjadrenia pre rovnovážne teplo možno diferenciál vnútornej energie sústavy s premenným počtom častíc (1.3.14) napísať v často používanom tvare

$$dU = TdS + \delta W_R + \sum_i \mu_i dn_i, \quad (1.4.8)$$

prípadne pri uvažovaní len objemovej práce v tvare

$$dU = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dn_i. \quad (1.4.9)$$

Druhý zákon termodynamický – existencia stavovej veličiny entropie S spĺňajúcej vzťah (1.4.6) má viaceré dôležité dôsledky, napríklad:

- Teplo nemôže spontánne prechádzať z chladnejšieho na teplejšie teleso.
- Všetky termodynamické stroje pracujúce vratne a cyklicky medzi dvoma rezervoármi tepla s teplotami $T_1 > T_2$ majú rovnakú účinnosť $\eta = (T_1 - T_2)/T_1$.
- Všetky nevratné termodynamické stroje pracujúce cyklicky medzi dvoma rezervoármi tepla s teplotami $T_1 > T_2$ majú účinnosť menšiu ako je účinnosť vratných strojov, t. j. $\eta < (T_1 - T_2)/T_1$.
- Neexistuje cyklicky pracujúci termodynamický stroj, ktorý by nerobil nič iné len odoberal teplo chladnejšiemu rezervoáru, odovzdával teplo teplejšiemu rezervoáru a konal by pri tom kladnú prácu. (Neexistencia perpetua mobile druhého druhu.)

Príklad 1.4.1 Uvažujme veľký rezervoár tepla s teplotou T_0 (napríklad veľký kus kovu) a malú sústavu – ideálny plyn uzavretý v nádobe s pohyblivým

piestom. Izotermický dej opisuje taký proces, pri ktorom má plyn rovnakú teplotu ako rezervoár, je v tepelnom kontakte s rezervoárom a mení svoj objem. (1) Za akých podmienok dôjde k spontánnemu nárastu objemu plynu? (2a) Ako sa zmení entropia plynu, ak sa jeho objem izotermicky zväčší na dvojnásobok? (2b) Ako sa zmení entropia rezervoáru počas tohto deja? (3) Akú prácu vykoná plyn pri tomto deji? (4) Ako je možné, že celková entropia sústavy plyn + rezervoár tepla sa nezmenia a napriek tomu sústava spontánne vykonala nenulovú prácu?

Riešenie:

(1) Ak je tlak plynu pri teplote T_0 v pieste väčší ako tlak vzduchu na druhej strane pohyblivej prepážky piestu.

(2a) Pre ideálny plyn je vnútorná energia funkciou len teploty, a preto bude pri izotermickom deji nemenná, $dU = 0$, t. j.

$$TdS - pdV = 0.$$

Na vyjadrenie tlaku využijeme stavovú rovnicu ideálneho plynu $pV = nRT$, kde n je látkové množstvo plynu a $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ je univerzálna plynová konštanta

$$\begin{aligned} TdS - \frac{nRT}{V}dV &= 0, \\ \Delta S &= nR \ln(V_2/V_1) = nR \ln 2. \end{aligned}$$

(2b)

$$\Delta S_{\text{rez}} = -\Delta Q/T_0 = -nR \ln 2 \quad (1.4.10)$$

(3)

$$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \frac{nR}{T_0} \ln 2 \quad (1.4.11)$$

(4) Aby sme dej mohli považovať za izotermický, musí prebiehať natoľko pomaly, aby sa v každom okamihu infinitezimálnej expanzie plynu jeho teplota vyrovnala na T_0 . To možno docieľiť tak, že tlak vzduchu na druhej strane prepážky piestu je len infinitezimálne menší ako je tlak v pieste. Tento rozdiel, akokoľvek malý, vedie k nárastu entropie (pozri rovnica (1.5.11) v nasledujúcej časti) sústavy plyn + rezervoár tepla + vzduch na druhej strane prepážky, a spontánne konanie práce celou sústavou je v súlade s druhým zákonom.

Na druhej strane, ak by bol rozdiel tlakov výrazný, sústava by sa v dôsledku expanzie objemu schladila a teplo by prechádzalo z rezervoáru do plynu nerovnovážne, čo by viedlo k nárastu entropie (pozri rovnica (1.5.9)

v nasledujúcej časti). Dej by v takom prípade nebol izotermický, pre veľmi veľkú rýchlosť expanzie by sa charakterom blížil k adiabatickému deju.

Úloha 1.4.2 Carnotov cyklus pozostáva zo štyroch dejov uzavretého množstva látky v pieste: (1) izotermická expanzia pri kontakte s teplotným rezervoárom s teplotou T_1 , (2) adiabatická expanzia na nižšiu teplotu druhého chladiaceho teplotného rezervoáru s teplotou $T_2 < T_1$, (3) izotermická kompresia pri kontakte s chladiacim rezervoárom a (4) adiabatická kompresia na teplotu rezervoáru T_1 , do počiatočného stavu látky. Dokážte, že účinnosť konania práce takéhoto piestu bude

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (1.4.12)$$

kde A je práca, ktorú piest vykoná za jeden cyklus a Q_1 je teplo prijaté od teplejšieho rezervoáru za jeden cyklus. Vysvetlite, prečo v prípade vratného Carnotovho deja bude v tomto výsledku platiť rovnosť.

Pri riešení využite len tieto tvrdenia: (a) zmena entropie určuje pri izotermickom deji množstvo prijatého alebo odovzdaného tepla, (b) pri adiabatickom rovnovážnom deji sa entropia nemení, (c) zmena entropie plynu pri kruhovom deji musí byť nula a (d) platnosť prvého zákona termodynamického. Evidentne tento významný výsledok nezávisí od materiálnej podstaty látky, a teda ide o maximálnu prípustnú účinnosť ľubovoľného stroja pracujúceho medzi dvoma rezervoármi tepla.

Príklad 1.4.3 Ako sa zmení entropia sústavy oboch rezervoárov a pracovného plynu v pieste pri vykonaní práce A počas jedného pracovného cyklu s účinnosťou η ? Teplota rezervoárov, medzi ktorými piest pracuje, nech je T_1 a $T_2 < T_1$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{rez}} &= -Q_1/T_1 - Q_2/T_2 \\ &= -Q_1/T_1 + (Q_1 - A)/T_2 = -A/(\eta T_1) + (A/\eta - A)/T_2 \\ &= A \left(-\frac{1}{\eta T_1} + \frac{1}{\eta T_2} - \frac{1}{T_2} \right) = \frac{A}{T_2 \eta} \left(-\frac{T_2}{T_1} + 1 - \eta \right) \end{aligned}$$

Podľa (1.4.12) je výraz v zátvorke nulový v prípade vratného deja.

1.5 Entropia a prechod do rovnovážneho stavu

Podľa druhého zákona termodynamického (1.4.6) uzavretá izolovaná sústava môže spontánne prejsť z jedného makrostavu do druhého len vtedy, ak jej entropia pri tom narastie, $\Delta S > 0$. Ak už pri daných (nemenných) stavových parametroch narastať nemôže, potom je maximálna a sústava je v *rovnovážnom* stave. Za stavové parametre, ktorých hodnota jednoznačne určí rovnovážny stav, si v nasledovnom vyberieme vnútornú energiu U , objem V a látkové množstvá jednotlivých zložiek n_α .

V rovnovážnom stave môžeme parametre U , V a n_α meniť pomalým konaním objemovej rovnovážnej práce $\delta W_R = -pdV$ a rovnovážnou výmenou tepla s okolím δQ_R . Sústava takto prejde do makrostavu s maximálnou entropiou pre aktuálne hodnoty U' , V' a n'_α rovnovážne, nevratná práca bude nulová a pre zmenu entropie v dôsledku zmien parametrov $dU = U' - U$, $dV = V' - V$ a $dn_\alpha = n'_\alpha - n_\alpha$ nájdeme pomocou rovnice (1.4.9) vyjadrenie:

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV - \sum_{\alpha} \frac{\mu_{\alpha}}{T}dn_{\alpha}. \quad (1.5.1)$$

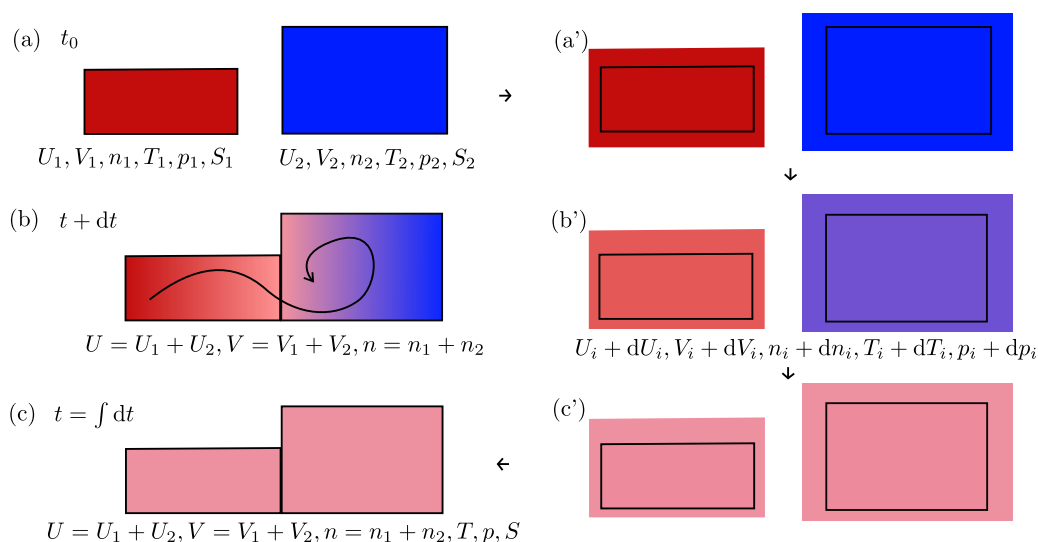
Jeho porovnaním s Taylorovým rozvojom entropie ako funkcie vnútornej energie, objemu a látkového množstva nachádzame vzťahy:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial U} \right|_{V, n_{\alpha}} = \frac{1}{T}, \quad \left. -\frac{\partial S}{\partial V} \right|_{U, n_{\alpha}} = \frac{p}{T}, \quad \left. \frac{\partial S}{\partial n_{\alpha}} \right|_{U, V, n_{\alpha'}} = \frac{\mu_{\alpha}}{T}, \quad (1.5.2)$$

ktoré predstavujú vyjadrenia ostatných stavových parametrov (T , p a μ_{α}) pomocou vybraných stavových parametrov U , V a n_{α} , ak poznáme entropiu ako ich funkciu $S(U, V, n_1, \dots, n_M)$.

Majme dve izolované sústavy, ktoré majú rozdielnu teplotu, tlak a chemický potenciál každej svojej zložky. V tejto počiatočnej situácii mala prvá sústava entropiu S_1 a druhá sústava entropiu S_2 . Potom ich uvedieme do kontaktu tak, že ako celok budú tvoriť uzavretú izolovanú sústavu. Pretože entropiu sme zaviedli ako extenzívnu veličinu, bude entropia spojenej sústavy $S = S_1 + S_2$ a teda aj $dS = dS_1 + dS_2$. Počas celého nerovnovážneho procesu spojenej izolovanej sústavy budú nemenné veličiny celkového objemu $V = V_1 + V_2$, celkovej vnútornej energie $U = U_1 + U_2$ a celkového látkového množstva všetkých zložiek $n_{\alpha} = n_{\alpha,1} + n_{\alpha,2}$. Preto bude platiť $dU = dU_1 + dU_2 = 0$, t. j. $dU_2 = -dU_1$ a podobne pre dV a dn_{α} a podľa rovnice (1.5.1) bude pre zmenu entropie po spojení a ustálení platiť

$$dS = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) dU_1 + \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) dV_1 - \sum_{\alpha} \left(\frac{\mu_{\alpha,1}}{T_1} - \frac{\mu_{\alpha,2}}{T_2} \right) dn_{\alpha,1} \geq 0 \quad (1.5.3)$$



Obr. 1.5.1: (a) Dve oddelené sústavy sú na začiatku každá vo svojom rovnovážnom stave. (b) Ich kontakt realizujeme tak, že ich celková vnútorná energia, objem ani počet častíc sa nezmení. (c) Po určitom čase sa spojená sústava dostane do nového rovnovážneho stavu, ktorého entropia je vyššia ako súčet entropií oboch sústav pred ich kontaktom. (a'),(b'),(c') ilustrujú vratný prechod dvoch oddelených sústav medzi tým istým počiatkovým a konečným stavom spojenej sústavy pomocou ich vnorenia do rezervoárov, ktoré majú veľmi pomaly menené svoje stavové veličiny.

Ak by sa od seba líšili iba počiatkové teploty, potom na splnenie tejto nerovnosti nájdeme

$$dS = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \left(dU_1 + p dV_1 - \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} dn_{\alpha,1} \right) \geq 0. \quad (1.5.4)$$

Výraz v druhej zátvorke má význam tepla δQ_1 , ktoré prijala prvá podsústava. Túto nerovnicu môžno splniť len ak

$$\delta Q_1 \leq 0 \text{ a } T_1 > T_2 \quad (1.5.5)$$

alebo

$$\delta Q_1 \geq 0 \text{ a } T_1 < T_2 \quad (1.5.6)$$

t. j. teplo prechádza z teplejšej podsústavy na chladnejšiu. Táto úvaha korešponduje s kvalitatívnou diskusiou pojmu teplejšieho a chladnejšieho telesa v časti 1.4. Vidíme tiež, že $T = \frac{\partial U}{\partial S}$, stavový parameter zavedený formálne

rovniciou (1.4.9), má tú vlastnosť, že ak sa pre dve sústavy zhoduje ($T_1 = T_2$), tak po ich uvedení do tepelného kontaktu nedôjde medzi nimi k výmene tepla ($\delta Q_1 = \delta Q_2 = 0$). Ide teda naozaj o mieru teploty sústavy, tak ako takúto veličinu empiricky chápeme.

Ak by sme uvažovali, že ustanovenie priebežnej rovnováhy v každej podsústave je výrazne rýchlejšie ako ich vzájomné vyrovnanie, potom hovoríme, že každá z podsústav je aj v priebehu ich vzájomného vyrovnávania v stave svojej vlastnej *lokálnej rovnováhy*. Potom na základe rovníc (1.5.5) a (1.5.6) môžeme v lineárnom priblížení písať ⁶

$$\frac{dQ_1}{dt} = -L_Q(T_1 - T_2), \quad (1.5.7)$$

kde L_Q je koeficient nezávislý od rozdielu teplôt, ale závislý od lokálnych rovnovážnych parametrov sústavy. Neskôr uvidíme, že koeficient L_Q súvisí s tepelnou vodivosťou látky a koeficientom prestupu tepla.

Ak použijeme lineárny nerovnovážny vzťah (1.5.7) v rovnici pre nárast entropie (1.5.4), pričom v lineárnom priblížení pre blízke teploty T_1 a T_2 použijeme vyjadrenie

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \approx \frac{T_2 - T_1}{T^2}, \quad T = \frac{T_1 + T_2}{2}, \quad (1.5.8)$$

nájdem

$$dS = \frac{L_Q}{T^2}(T_1 - T_2)^2 dt, \quad (1.5.9)$$

matematické vyjadrenie pre nárast entropie v dôsledku vyrovnávania teplôt medzi dvoma podsústavami. Koeficient L_Q musí byť kladný, aby bol splnený druhý zákon termodynamický, t. j. aby entropia rástla.

Podobným postupom možno nájsť vzťah pre relaxáciu objemu, ak by sa líšili iba tlaky,

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{L_V}{T}(p_1 - p_2), \quad L_V > 0. \quad (1.5.10)$$

Objem podsústavy s počiatočne vyšším tlakom bude teda narastať na úrok objemu druhej podsústavy. Koeficient L_V súvisí s objemovou viskozitou látky a výraz pre nárast entropie nadobudne tvar

$$dS = \frac{L_V}{T^2}(p_1 - p_2)^2 dt. \quad (1.5.11)$$

⁶Predpokladáme, že každá z podsústav nadobudne stav svojej lokálnej rovnováhy za interval času oveľa kratší ako uvažovaný prírastok času dt .

Nakoniec, ak teploty aj tlaky podsústav sú rovnaké a líšili by sa počiatkové hodnoty ich chemických potenciálov, nájdeme vzťah pre difúziu zložky α medzi podsústavami

$$\frac{dn_{\alpha,1}}{dt} = -\frac{L_{\alpha}}{T} (\mu_{\alpha,1} - \mu_{\alpha,2}), L_{\alpha} > 0. \quad (1.5.12)$$

Mólové množstvo látky v podsústave, kde je jej chemický potenciál na začiatku vyšší, bude klesať a táto zložka bude difundovať do druhej podsústavy. Koeficient L_{α} súvisí s koeficientom difúzie zložky α .

Ak by podsústavy boli v nerovnováhe tak, že sa od seba odlišujú vo viac ako len jednej stavovej veličine, potom môže dochádzať aj k *skríženým javom* – rozdielne chemické potenciály môžu viesť k prenosu tepla a zmene objemu. Nerovnosť (1.5.3) zapíšeme v tvare

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i X_i Y_i \geq 0 \quad (1.5.13)$$

kde X_i nazývame termodynamické sily (napr. $X_Q = 1/T_1 - 1/T_2$), a Y_i k nim patriace termodynamické toky (napr. $Y_U = \frac{dQ}{dt}$). Na splnenie tejto nerovnosti v lineárnom priblížení vzhľadom na termodynamické sily musí platiť

$$Y_i = \sum_k L_{ik} X_k \quad (1.5.14)$$

kde L_{ik} musí byť kladne definitná matica. Koeficienty L_{ik} sa nazývajú Onsagerove koeficienty. Uvedené rovnice predstavujú špeciálny príklad lineárnej nerovnovážnej termodynamiky: problém dvoch homogénnych podsústav možno zovšeobecniť na všeobecné hľadanie zákonitostí pre nehomogénne sústavy, čomu sa budeme venovať v časti 5.2.

Úloha 1.5.1 V texte sme opísali nerovnovážny prístup k vyrovnávaniu teploty dvoch pôvodne izolovaných sústav. Opíšte ako možno zrealizovať rovnovážny proces vytvorenia tepelného kontaktu týchto sústav, ak máme k dispozícii rezervoár tepla, ktorého teplotu dokážeme nastaviť na ľubovoľnú hodnotu. Vypočítajte nárast entropie takejto spojenej sústavy v dôsledku vyrovnania ich teplôt, ak jednotlivé sústavy predstavujú ideálny plyn.

Výsledok:

$$\Delta S = C_{V,1} \ln(T/T_1) + C_{V,2} \ln(T/T_2), \quad T = \frac{C_{V,1}T_1 + C_{V,2}T_2}{C_{V,1} + C_{V,2}},$$

kde $C_{V,1(2)}$ je tepelná kapacita plynu 1(2) pri nemennom objeme.

Úloha 1.5.2 V úlohe 1.4.2 bola v druhom kroku Carnotovho cyklu uvažovaná adiabatická expanzia sústavy, t. j. sústava tepelne izolovaná *spontánne* zväčšovala svoj objem a konala tým prácu. Vysvetlite, v čom spočíval nárast entropie pri nerovnovážnej expanzii sústavy pomocou rovníc (1.5.10) a (1.5.11). Ako možno docieľiť, aby bol tento dej rovnovážny? Akým smerom sa v tomto prípade bude meniť objem sústavy, bude expandovať alebo sa bude stláčať?

1.6 Derivácie stavových veličín a úloha meraní

V časti 1.4 sme pre sústavu, ktorej rovnovážny stav je určený stavovými veličinami S , V a n_i našli vyjadrenie pre prírastok vnútornej energie v tvare (1.4.9),

$$dU = TdS - pdV + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} dn_{\alpha} \quad (1.6.1)$$

Tento výraz rešpektuje rozdelenie zmeny vnútornej energie na množstvo rovnovážne prijatého tepla $\delta Q_R = TdS$ a množstvo rovnovážne vykonanej objemovej práce na sústave $\delta W_R = -pdV$.

Ak tento vzťah porovnáme s vyjadrením diferenciálu vnútornej energie ako funkcie stavových premenných S , V a n_{α} ,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial S} dS + \frac{\partial U}{\partial V} dV + \sum_i \frac{\partial U}{\partial n_{\alpha}} dn_{\alpha}, \quad (1.6.2)$$

nájdeme priame vyjadrenia na určenie ďalších dôležitých stavových veličín – teploty, tlaku a chemického potenciálu zložky α ,

$$T = \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_{V, n_{\alpha}}, \quad p = - \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{S, n_{\alpha}}, \quad \mu_{\alpha} = \left. \frac{\partial U}{\partial n_{\alpha}} \right|_{S, V, n_{\beta \neq \alpha}}. \quad (1.6.3)$$

Pomocou týchto vzťahov by sme priamym derivovaním našli teplotu alebo tlak sústavy, ak by sme poznali vnútornú energiu ako funkciu entropie a objemu. Bohužiaľ, v praxi sa oveľa častejšie stretávame s využívaním práve teploty a tlaku ako radiacích stavových veličín, nakoľko ich hodnotu vieme v experimente najľahšie nastaviť. Toto odzrkadľujú aj termodynamické charakteristiky látok, z ktorých najdôležitejšie v tejto podkapitole zavedieme.

Ukážeme si, ako pomocou týchto charakteristík vieme určiť vnútornú energiu, objem alebo entropiu študovanej sústavy. Tejto otázke sa venujú časti 1.7 a 1.8.

Tepelnú kapacitu pri konštantnom objeme definujeme vzťahom

$$C_V = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V. \quad (1.6.4)$$

Táto veličina nie je ľahko merateľná pre kvapaliny alebo tuhé látky, nakoľko udržiavať objem látok nemenný pri zmene teploty vyžaduje reguláciu vonkajšieho tlaku. Preto sa definuje experimentálne prístupnejšia veličina – *tepelná kapacita látky pri konštantnom tlaku*,

$$C_p = \left. \frac{\partial Q}{\partial T} \right|_p = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p, \quad (1.6.5)$$

kde sme využili, že podľa rovnice (1.4.7) je pri rovnovážnej zmene malé množstvo prijatého tepla rovné zmene entropie prenášobou aktuálnou termodynamickou teplotou.

Vnútorná energia a entropia sú *extenzívne veličiny*, t. j. úmerné množstvu látky, a preto sa zavádzajú hmotnostné tepelné kapacity $c_V = C_V/m$ alebo $c_p = C_p/m$, kde m je hmotnosť uvažovanej látky. Hodnoty hmotnostnej tepelnej kapacity troch reprezentačných látok sú v tabuľke 1.1.

Hmotnostnú tepelnú kapacitu pri konštantnom tlaku možno dobre merať. Z meraní vieme, že táto veličina vo všeobecnosti závisí od teploty a tlaku prostredia, v ktorom sa látka nachádza. Pomocou termodynamických vzťahov môžeme určiť, do akej miery nameraná závislosť $c_p(T,p)$ pre určitú konkrétnu látku, určuje ostatné termodynamické veličiny, napr. $c_V(T,p)$. Odpoveď na túto otázku nájdeme v príklade 1.8.1.

Koeficient teplotnej rozpínivosti látky sa definuje vzťahom

$$\beta = \left. \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p \quad (1.6.6)$$

a určuje malý prírastok objemu látky ΔV , ktorej aktuálny objem je V a jej teplota sa zvýši o prírastok teploty ΔT ,

$$\Delta V = V_0 \beta \Delta T. \quad (1.6.7)$$

Uvedomme si, že nakoľko prírastok objemu aj samotný objem sú extenzívne, tak koeficient β už extenzívna veličina nie je a má zmysel ju uvádzať v tabuľkách pre rôzne látky. Práve z tohto dôvodu bol koeficient rozpínivosti

látka	ρ (g/cm ³)	c_p (J/[kg.K])	κ (1/Pa)	β (1/K)
Al	2,7	900	$1/(76 \cdot 10^9)$	$66 \cdot 10^{-6}$
voda	1,0	4200	$1/(2,2 \cdot 10^9)$	$2 \cdot 10^{-4}$
vzduch	$1,3 \cdot 10^{-3}$	1000	$1/10^5$	$1/300$

Tabuľka 1.1: Typické hodnoty rovnovážnych termodynamických charakteristík látok pri $T = 300$ K a $p_a = 10^5$ Pa.

zavedený spolu s objemom látky v menovateli v rovnici (1.6.6). Hodnoty koeficientu rozpínavosti pre tri reprezentačné látky sú v tabuľke 1.1.

Koeficient stlačiteľnosti látky sa definuje vzťahom

$$\kappa = - \left. \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T \quad (1.6.8)$$

a určuje malý prírastok objemu látky ΔV , ktorej aktuálny objem je V ak jej tlak sa zvýši o prírastok Δp pri konštantnej teplote prostredia,

$$\Delta V = -V_0 \kappa \Delta p. \quad (1.6.9)$$

Znamienko mínus je zavedené z toho dôvodu, aby samotný koeficient bol pre látku kladný. Hodnoty koeficientu stlačiteľnosti pre tri reprezentačné látky sú v tabuľke 1.1.

Znalosť takto zavedených a experimentálne merateľných veličín umožňuje preformulovať vyjadrenie pre nárast *hmotnostnej* vnútornej energie u z tvaru 1.6.1 (vyjadreného na jednotku hmotnosti látky) na vyjadrenie pomocou zmien priamo merateľných parametrov, ako sú napríklad teplota a tlak,

$$du = (c_p dT - \dots) + (\dots) dp,$$

alebo teplota a objem,

$$du = c_V dT + \left(-p \frac{T\beta}{\kappa} \right) dV.$$

Tento vzťah odvodíme v príklade 1.7.1. Takto vyjadrené prírastky hmotnostnej vnútornej energie možno využiť na tvorbu termodynamických tabuliek pre hmotnostnú vnútornú energiu látok, pre ktoré máme zmerané závislosti hustoty, tepelnej kapacity a koeficientov rozťažnosti a stlačiteľnosti ako funkcie teploty a tlaku alebo teploty a hustoty.

Príklad 1.6.1 Koeficient objemovej stlačiteľnosti vody pri atmosférickom tlaku a teplote 20 °C je $\kappa = 4,7 \cdot 10^{-10}$ Pa⁻¹. Ak sa zvýši tlak pôsobiaci na

vodu o 10-násobok atmosférického tlaku, $\Delta p = 10p_a = 10^6$ Pa, bude relatívna zmena objemu

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p \approx -4,7 \cdot 10^{-4} \approx -0,05\% \quad (1.6.10)$$

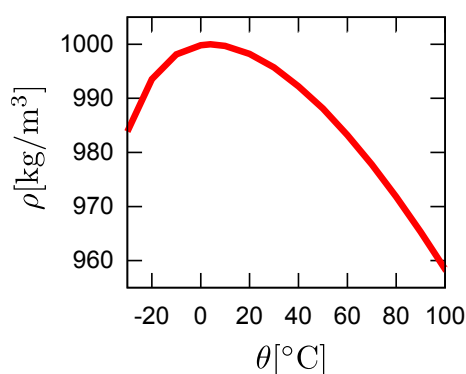
Vodu teda môžeme pri bežných kolísaniach tlaku považovať za nestlačiteľnú.

Koeficient teplotnej rozpínavosti vody pri 20 °C a atmosférickom tlaku je $\beta = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Relatívna zmena objemu vody pri zohriatí o $\Delta\theta = 30 \text{ } ^\circ\text{C}$ bude

$$\frac{\Delta V}{V} = \beta \Delta\theta \approx 2,0 \cdot 10^{-4} \cdot 30 \approx 0,6\% \quad (1.6.11)$$

S teplotou sa teda voda rozpína veľmi málo, no tento efekt bude výraznejší pri bežných procesoch ako vplyv tlaku na hustotu. Zmena hustoty kvapaliny s teplotou je kľúčovo dôležitá pri vzniku prirodzeného prúdenia ako napríklad prúdenie vody v ohrievajúcom sa hrnci.

Úloha 1.6.2 Závislosť hustoty vody od teploty pri atmosférickom tlaku je nelineárna (Obr. 1.6.1), s maximom pri $\theta \approx 4 \text{ } ^\circ\text{C}$ [10]. Odhadnite, nakoľko sa zmení koeficient teplotnej rozpínavosti ohriatím vody z teploty 20 °C na 80 °C pomocou grafu na obrázku 1.6.1.



Obr. 1.6.1: Graf závislosti hustoty vody od teploty pri atmosférickom tlaku. Hustota vody pri 4 °C je vyššia ako pri bode mrazu, hoci tento rozdiel je len 0,02%.

Príklad 1.6.3 Teplota, objem a tlak plynov spĺňajú s dobrou presnosťou stavovú rovnicu ideálneho plynu

$$pV = nRT, \quad (1.6.12)$$

kde n je látkové množstvo plynu a $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ je univerzálna molová plynová konštanta. Nájdite koeficienty objemovej stlačiteľnosti a teplotnej rozpínavosti vzduchu v štandardnom stave, t. j. pri $p = p_a = 101 \text{ kPa}$ a $\theta^\circ = 25^\circ \text{C}$.

Riešenie: Podľa (1.6.8),

$$\kappa = -\frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{p_a}{nRT^\circ} \frac{\partial}{\partial p} \frac{nRT^\circ}{p} \Bigg|_{p=p_a} = \frac{1}{p_a} \approx 10^{-5} \text{ Pa} \quad (1.6.13)$$

a podľa (1.6.6),

$$\beta = \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p_a}{nRT^\circ} \frac{\partial}{\partial T} \frac{nRT}{p_a} \Bigg|_{T=T^\circ} = \frac{1}{T^\circ} \approx 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \quad (1.6.14)$$

Vidíme, že v porovnaní s vodou je vzduch asi 10-krát teplotne rozpínavejší a 100 000-krát stlačiteľnejší.

1.7 Voľná energia a práca

V typických situáciách sa fyzikálne sústavy nachádzajú v kontakte s prostredím, ktoré charakterizujeme teplotou, tlakom, alebo chemickým potenciálom. Sústava v kontakte s prostredím nemá vo všeobecnosti nemennú vnútornú energiu, objem ani počet častíc. Preto rovnovážny stav sústavy bude závisieť od teploty a tlaku prostredia a nemožno ho hľadať ako stav s maximálnou entropiou, ako je to v prípade nemennej vnútornej energie, objemu a počte častíc. Na hľadanie rovnovážnych stavov sústav (tuhých látok s rôznymi kryštalickými štruktúrami, magnetickým usporiadaním, supravodivým usporiadaním e.t.c.) pri známych vonkajších podmienkach (teplota, tlak, magnetické pole...) nám slúžia *termodynamické potenciály* ako je napríklad voľná energia, entalpia alebo Gibbsova voľná energia.

Voľnú energiu definujeme vzťahom

$$F = U - TS. \quad (1.7.1)$$

Použitím 1. a 2. zákona termodynamického vo forme rovníc (1.3.14) a (1.4.6) nájdeme pre jej rozdiel medzi dvoma blízkyimi rovnovážnymi stavmi výraz

$$dF = \delta Q + \delta W + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} dn_{\alpha} - TdS - SdT \quad (1.7.2)$$

$$dF \leq -SdT + \delta W + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} dn_{\alpha} \quad (1.7.3)$$

Nájdenú nerovnosť možno interpretovať podobne ako sme interpretovali nárast entropie pre izolovanú sústavu s obmenou toho, čo považujeme za nemenné: pri nemennej teplote rezervoáru, s ktorým je sústava v kontakte, a nemennom počte častíc musí pri spontánnom deji⁷ voľná energia klesať ($dF \leq \delta W \leq 0$) a v rovnovážnom stave nadobudne minimum.

Na druhej strane, keď je už sústava v rovnováhe, platí rovnosť a pre zmenu voľnej energie získame vyjadrenie (napr. pri vyjadrení mechanickej práce ako objemovej rovnovážnej práce $\delta W = -pdV$)

$$dF = -SdT - pdV + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} dn_{\alpha} \quad (1.7.4)$$

Zavedením voľnej energie sme prešli od vnútornej energie, uvažovanej ako funkcie stavových parametrov entropie a objemu $U(S,V)$, k voľnej energii ako funkcii teploty a objemu $F(T,V)$, pričom novú nezávislú premennú – teplotu – zavádzame predpisom

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}. \quad (1.7.5)$$

V matematike sa podobná zámena premenných nazýva *Legendrova transformácia*: $f(x,y) \rightarrow g(z,y)$ kde $z = \frac{\partial f}{\partial x}$ a

$$\begin{aligned} g(z,y) &= f(x(y,z),y) - zx(y,z), \\ dg &= df - zdx - xdz \\ &= zdx + \frac{\partial f}{\partial y} dy - zdx - xdz \\ &= -xdz + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \end{aligned}$$

Vďaka vzájomnému zrušeniu sa členov zdx vieme nájsť predpis pre dg pomocou zmien jej premennej z bez toho, aby sme poznali konkrétny tvar $x(y,z)$.

Ak sa vrátíme k všeobecnému tvaru nerovnosti (1.7.3) a budeme uvažovať sústavu s nemenným látkovým množstvom, potom vo všeobecnosti *práca, ktorú sústava môže vykonať* pri kontakte s teplotným rezervoárom s nemennou teplotou je

$$\delta A = -\delta W \leq -dF|_T \quad (1.7.6)$$

A teda *maximálna práca*, ktorú sústava v kontakte s teplotným rezervoárom dokáže vykonať, je daná poklesom voľnej energie medzi počiatočným a koncovým stavom,

$$\Delta A = F(V_1, T) - F(V_2, T) \quad (1.7.7)$$

⁷Dej bude spontánný, ak sústava koná kladnú prácu, t. j. práca konaná na sústave je záporná $\delta W \leq 0$.

Táto vlastnosť je aj dôvodom, prečo sa veličina F volá „volná“ energia.

Príklad 1.7.1 Nájdite vzťah pre zmenu vnútornej energie pri malej zmene teploty a objemu látky ($dn_\alpha = 0$), vyjadrenú pomocou koeficientu objemovej teplotnej rozpínavosti β a koeficientu stlačiteľnosti κ .

Riešenie: Zmena vnútornej energie je podľa rozdelenia na teplo a prácu (pri nemennom počte častíc) daná pomocou stavových premenných S a V ,

$$dU = TdS - pdV, \quad (1.7.8)$$

t. j. ako diferenciál funkcie $U(S,V)$. Teraz chceme prejsť na jej opis ako funkcie $U = U(T,V)$, zrejme pomocou nejakého vzťahu $S(T,V)$. Preto ak

$$dU = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V dT + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T dV \quad (1.7.9)$$

potom

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T = \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S + \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T = -p - T \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = -p + T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V$$

kde sme použili vzťahy

$$p = - \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_S \quad \text{a} \quad T = \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V \quad \text{podľa (1.7.8)} \quad (1.7.10)$$

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_V \quad \text{a} \quad p = - \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_T \quad \text{podľa (1.7.4)} \quad (1.7.11)$$

Derivácia $\left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V$ obsahuje tri stavové premenné p, T a V , medzi ktorými musí existovať vzájomný vzťah (dve stačia na jednoznačné určenie rovnovážneho stavu) $V = V(p, T)$. Ak tento implicitný vzťah zderivujeme podľa teploty pri konštantnom objeme, nachádzame identitu

$$0 = \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V + \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p \rightarrow \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V = - \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p}{\left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T} = \frac{\beta}{\kappa} \quad (1.7.12)$$

takže nachádzame

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_T = -p + T \frac{\beta}{\kappa} \quad (1.7.13)$$

Derivácia $\left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V$ má priamo význam tepelnej kapacity pri konštantnom objeme nakoľko

$$C_V = \left. \frac{\delta Q}{dT} \right|_V = \left. \frac{dU + pdV}{dT} \right|_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V \quad (1.7.14)$$

Preto hľadané vyjadrenie pre malú zmenu vnútornej energie bude

$$dU = C_V dT + \left(-p + \frac{T\beta}{\kappa} \right) dV \quad (1.7.15)$$

Tento vzťah, prepočítaný na jednotku hmotnosti látky využijeme neskôr pri odvádzaní rovnice vedenia tepla pre stlačiteľnú látku.

Na druhej strane, toto vyjadrenie pre zmenu vnútornej energie je aj prakticky veľmi výhodné, nakoľko všetky v ňom vystupujúce charakteristiky C_V, β, κ ako aj veličiny p a T sú priamo experimentálne merateľné⁸. Zmeraním hodnôt C_V, β, κ pre rôzne hodnoty tlaku a teploty pre konkrétnu látku dostávame úplný opis jej termodynamických vlastností.

Príklad 1.7.2 Uvažujte malú časť veľkej sústavy s teplotou T . Voľná energia malej časti bude $F' = U' - TS'$. Ukážte, že z podmienky minima voľnej energie a stability sústavy voči malým fluktuáciám vyplýva, že tepelná kapacita pri konštantnom objeme musí byť kladná, t.j. $C_V \geq 0$. (*Termodynamické nerovnosti*, [8])

Riešenie: Uvažujme fluktuáciu v malej časti, pri ktorej ostane jej objem nezmenený. Jej vnútorná energia bude potom len funkciou jej entropie a uvažovaním Taylorovho rozvoja tejto závislosti do druhého rádu nájdeme $\delta U' = \frac{\partial U'}{\partial S'} \delta S' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U'}{\partial S'^2} (\delta S')^2 = T \delta S' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U'}{\partial S'^2} (\delta S')^2$. Z minima voľnej energie vyplýva, že pri fluktuácii – malom vychýlení sa malej časti z rovnovážneho stavu – musí platiť $\delta F' \geq 0$, čo po dosadení nájdeneho rozvoja vedie na nerovnosť

$$\delta F = \delta U' - T \delta S' = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U'}{\partial S'^2} (\delta S')^2 \geq 0.$$

Musí teda platiť nerovnosť $\frac{\partial^2 U'}{\partial S'^2} \geq 0$. Presvedčíme sa, že tento výraz súvisí s tepelnou kapacitou:

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = \frac{\partial U}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T},$$

t. j. $\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{C_V}{T}$. Na druhej strane z $T = \frac{\partial U}{\partial S}$ nájdeme derivovaním (stále pri konštantnom objeme) $\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{\partial^2 U}{\partial S^2}$, a preto nakoniec

$$\frac{T}{C_V} = \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} \geq 0.$$

⁸ $C_V = mc_V$ vyjadrujeme pomocou hmotnosti látky m a hmotnostnej tepelnej kapacity c_V . c_V nie je ľahko priamo merateľná, ale dá sa vypočítať z c_p , ktorá je najvhodnejšia na priame meranie – pozri príklad 1.8.1 v nasledujúcej kapitole.

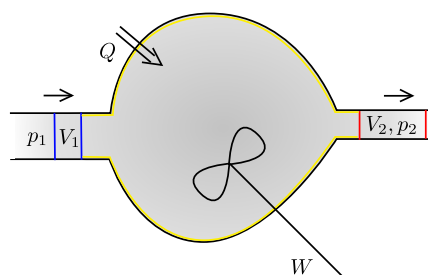
Pretože absolútna teplota je vždy kladná, musí byť kladná aj tepelná kapacita akejkoľvek malej časti skúmanej sústavy.

1.8 Entalpia a tepelná kapacita

Pri úvahách o toku energie pri konvekcií tepla v prietokových reaktoroch v časti 4.3 sa stretáme s ďalším termodynamickým potenciálom – entalpiou. Entalpiu sústavy v rovnováhe definujeme vzťahom

$$H = U + pV \quad (1.8.1)$$

Zmena entalpie prúdiacej tekutiny cez reaktor pri určitom nastavení tlaku na vstupe a výstupe sa rovná celkovej práci a teplu dodanému látke v reaktore (Obr. 1.8.1). Ak do reaktora za Δt vstúpi potrubím objem látky V_1 , ktorý



Obr. 1.8.1: Na vyjadrenie bilancie energie v prietokovom reaktore uvažujeme skúmané množstvo látky, ktoré sa v čase $t = 0$ nachádza vnútri oblasti vyznačenej modrou a žltou hranicou. Za interval času Δt sa táto látka presunie tak, že sa nachádza vnútri oblasti ohraničenej žltou a červenou hranicou. V potrubí na vstupe vykoná za tento čas „iná“ látka naľavo od modrej oblasti na skúmanej látke prácu $p_1 V_1$, kým na výstupe vykoná skúmaná látka na ďalšej inej látke v potrubí prácu $p_2 V_2$.

má vnútornú energiu U_1 , pričom na výstupe za tento interval času vystúpi látka s objemom V_2 do potrubia s tlakom p_2 , potom v ustálenom režime bude zmena vnútornej energie látky prechádzajúcej reaktorom daná bilanciou

$$(U_0 + U_2) - (U_0 + U_1) = p_1 V_1 - p_2 V_2 + W + Q \quad (1.8.2)$$

kde U_0 je vnútorná energia látky v objeme vyznačenom žltým okrajom na Obr. 1.8.1, W celková práca vykonaná na látke vnútri reaktora a Q teplo dodané za tento prírastok času. Úpravou dostaneme pre zmenu entalpie

$$\Delta H = \Delta(U + pV) = W + Q. \quad (1.8.3)$$

Ustálený režim vyžaduje, aby hmotnosť vstupujúcej a vystupujúcej látky bola rovnaká, preto uvedený vzťah možno zapísať aj pomocou hmotnosti látky, ktoré prechádza reaktorom za jednotku času \dot{m} v tvare

$$\dot{m}\Delta h = P + J_Q \quad (1.8.4)$$

kde Δh je zmena hmotnostnej entalpie látky v dôsledku jej prechodu reaktorom a $P = dW/dt$ a $J_Q = dQ/dt$. V týchto úvahách je zanedbaný príspevok kinetickej či potenciálnej energie v gravitačnom poli, ktoré sú typicky v priemyselných a energetických aplikáciách zanedbateľné. K formulácii tejto problematiky z pohľadu mechaniky kontinua je preberaná v časti 4 v úlohe 4.3.1.

V špeciálnom, ale z hľadiska vývoja termodynamiky významnom prípade Joulovom–Thomsonovom jave, „reaktor“ predstavuje perforovanú zátku, cez ktorú voľne expanduje plyn z vyššieho tlaku na nižší. Joulov–Thomsonov proces možno považovať za približne *izentalpický*.

Hoci aj pre entalpiu možno podobne ako pre voľnú energiu sformulovať princíp minima planý pri určitých podmienkach, jeho použitie nie je veľmi praktické. Naopak, veľmi často sa využíva princíp minima ďalšieho termodynamického potenciálu – Gibbsovej voľnej energie, a to najmä v oblasti materiálového inžinierstva, chémie a fyziky kondenzovaných látok (pozri úloha 1.8.3).

Entalpia je Legendrovou transformáciou vnútornej energie, ak zamieňame nezávislú premennú V na p . Z definície, derivovaním, pre infinitezimálnu zmenu entalpie nachádzame

$$dH = dU + Vdp + pdV = TdS + Vdp + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha}n_{\alpha} \quad (1.8.5)$$

z čoho plynú termodynamické vzťahy

$$\left. \frac{\partial H}{\partial S} \right|_{p, n_{\alpha}} = T, \quad \left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_{S, n_{\alpha}} = V, \quad \left. \frac{\partial H}{\partial n_{\alpha}} \right|_{S, p, n_{\alpha'}} = \mu_{\alpha}. \quad (1.8.6)$$

Ak sa vrátíme k základnej forme 1. zákona termodynamického (1.3.14) a budeme uvažovať sústavu s nemenným látkovým množstvom, na ktorej je konaná len objemová práca rezervoárom, potom teplo, ktoré sústava musí prijať, je dané zmenou entalpie,

$$\delta Q = dU + pdV = dH|_p, \quad (1.8.7)$$

S týmto súvisí aj definícia tepelnej kapacity pri konštantnom tlaku,

$$C_p = \left. \frac{\delta Q}{dT} \right|_p = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_p = \left. \frac{\partial H}{\partial S} \right|_p \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p \quad (1.8.8)$$

Príklad 1.8.1 Vyjadrite vzťah medzi tepelnou kapacitou pri konštantnom tlaku a tepelnou kapacitou pri konštantnom objeme pomocou koeficientov β a κ . Porovnajete ich veľkosť pre hliník v štandardnom stave ($T = 300\text{K}$ a $p_a \approx 10^5\text{Pa}$).

Riešenie:

$$C_V = \left. \frac{\delta Q}{dT} \right|_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_V \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V \quad (1.8.9)$$

preto

$$C_p - C_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p - T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V \quad (1.8.10)$$

Poznáme diferenciál entropie ako funkcie U a V (1.5.1). Ak si predstavíme entropiu ako funkciu T a V potom

$$\left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_p = \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V + \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p \quad (1.8.11)$$

a preto

$$C_p - C_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = -T \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p \quad (1.8.12)$$

kde sme použili (1.7.11) na úpravu

$$\left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T = - \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_V \quad (1.8.13)$$

Nakoniec využijeme už získaný vzťah (1.7.12) a získame hľadané vyjadrenie

$$C_p - C_V = -T \frac{\left(\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p \right)^2}{\left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_T} = TV \frac{\beta^2}{\kappa} \quad (1.8.14)$$

Predelením s hmotnosťou dostaneme vzťah pre hmotnostné kapacity,

$$c_p - c_V = \frac{T \beta^2}{\rho \kappa} \quad (1.8.15)$$

Použitím typických hodnôt z tabuľky 1.1 nájdeme $c_p - c_V \approx 37 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$. Vzhľadom na to, že pre hliník je $c_V \approx 1000 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, je rozdiel týchto dvoch veličín pre hliník (a aj pre väčšinu tuhých látok a kvapalín) relatívne malý.

Úloha 1.8.2 Vnútorná energia jedného molu ideálneho plynu pozostávajúceho z dvojatómových molekúl je daná vzťahom $U(T) = (5/2)RT$, kde R je univerzálna plynová konštanta. (a) Nájdite molovú tepelnú kapacitu ideálneho plynu pri konštantnom objeme, (b) Použitím všeobecného vzťahu pre rozdiel hmotnostných kapacít pri konštantnom tlaku a objeme sa presveďte, že pre 1 mol ideálneho plynu platí

$$C_p - C_V = R.$$

Pri vyjadrení môžete použiť výsledky príkladu 1.6.3

Úloha 1.8.3 Gibbsova voľná energia sústavy sa definuje vzťahom

$$G = U - TS + pV \quad (1.8.16)$$

a obsahuje aditívny člen z definície voľnej energie F aj entalpie H . V analógii s úvahami spravenými pre voľnú energiu ukážte: (1) Gibbsova voľná energia sústavy v kontakte s rezervoárom tepla s teplotou T a s rezervoárom objemu s tlakom p nadobúda v rovnovážnom stave minimum, (2) diferenciál Gibbsovej energie pri malej zmene rovnovážneho stavu je daný predpisom $dG = -SdT + Vdp + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} dn_{\alpha}$, (3) vďaka extenzívnosti G a n_{α} musí platiť $G = \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} n_{\alpha}$, kde $\mu_{\alpha} = \mu_{\alpha}(T, p, n_1/n, \dots, n_M/n)$ a $n = \sum_{\alpha} n_{\alpha}$, (4) platí identita $\sum_{\alpha} n_{\alpha} d\mu_{\alpha} = 0$ (Duhamov vzťah).

Princíp minima Gibbsovej energie určuje fázové diagramy pre štruktúrne a skupenské fázové diagramy látok v prostredí s danou teplotou a tlakom.

Príklad 1.8.4 Parný kotol vytvára prehriatu paru pod tlakom 0,6 MPa s teplotou 180 °C. Na výrobu 1 tony etanolu sa spotrebuje 19,5 ton takejto vodnej pary. Z nej 10 ton s teplotou 90 °C v kvapalnom skupenstve sa vracia na začiatok cyklu do kotla, kde sa zmiešava so zvyškom potrebnej vody s teplotou 15 °C. Aká je energetická náročnosť výroby 1 tony etanolu?

Riešenie: Energia, ktorá sa v takomto prietokovom procese spotrebuje, je daná rozdielom entalpie látky na výstupe a na vstupe. Preto pre energetickú náročnosť musíme vyčíslit zmenu entalpie vody/vodnej pary pri prechode kotlom. Celkový rozdiel entalpie vstupujúcej a vystupujúcej vody/pary vyjadríme ako súčin *hmotnostnej entalpie* $h = H/m$ a hmotnosti vody potrebnej na výrobu 1 tony etanolu $m = 19,5$ t.

Inžinieri energetici by úlohu riešili takto: v tabuľkách vodnej pary [9] nájdeme hmotnostnú entalpiu nasýtenej pary pri tlaku $p = 0,6$ MPa (nasýtená

para je para v rovnováhe s vriacou vodou) $h = 2755,46 \text{ kJ/kg}$. Pri tejto hodnote sa dočítame, že teplota varu pri tomto tlaku je $\vartheta_c = 158,84^\circ\text{C}$ a hmotnostná tepelná kapacita pary $c_p = 2,387 \text{ kJ/(kg.K)}$. Pomocou týchto údajov a integrovaním vzťahu (1.8.8) spočítame entalpiu prehriatej pary (prehriata – má vyššiu teplotu ako nasýtená para pri danom tlaku) na výstupe kotla

$$\begin{aligned} c_p = \frac{\partial h}{\partial \vartheta} \Rightarrow h_{\text{out}} &= h(\vartheta_c) + c_p(\vartheta_{\text{out}} - \vartheta_c) \\ &= 2806,0 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

Voda pred jej ohrevom v kotli sa získa zmiešaním, pričom hmotnostný zlomok horúcej vody vracajúcej sa z výroby označme $\tilde{c} = 10/19,5 = 0,513$. Entalpia vody vstupujúcej do kotla bude daná súčtom entalpií chladnej a horúcej vody. Pre hmotnostnú entalpiu z toho vyplýva

$$h_{\text{in}} = (1 - \tilde{c})h(p_a, 15^\circ\text{C}) + \tilde{c}h(p_a, 90^\circ\text{C})$$

Z termodynamických tabuliek pre vodu [10] nájdeme⁹ $h(p_a, 15^\circ\text{C}) = 63,04 \text{ kJ/kg}$ a $h(p_a, 90^\circ\text{C}) = 376,96 \text{ kJ/kg}$ a teda výsledná vstupná entalpia bude $h_{\text{in}} = 224,08 \text{ kJ/kg}$. Energetická náročnosť výroby 1 tony etanolu bude:

$$\Delta E = m(h_{\text{out}} - h_{\text{in}}) = 19,5 \times 10^3 \cdot (2806,0 - 224,08) \text{ kJ} = 50,3 \text{ MJ}$$

Úloha sa dá riešiť aj menej tabuľkovo-inžiniersky, pomocou tepelnej kapacity vody (meraný parameter, $c_{\text{aq}} = 4,18 \text{ kJ/(kg.K)}$), skupenského tepla premeny vody na paru pri p_a (meraný parameter $l = 2257,92 \text{ kJ/kg}$) a tepelnej kapacity vodnej pary pri konštantnom tlaku – ako ideálneho plynu s trojatómovými molekulami $c_p = \frac{4R}{M_m} = 1,85 \text{ kJ/(kg.K)}$. Tento výpočet nebude až tak presný, lebo zanedbáva závislosť skupenského tepla od tlaku a predpokladá, že vodná para je ideálny plyn.

⁹Všimnime si, že tepelná kapacita vody je podľa týchto údajov $c_{p,\text{aq}} = \Delta h/\Delta \vartheta = (376,96 - 63,04)/(90 - 15) = 4,186 \text{ kJ/(kg.K)}$. Na túto časť výpočtu sme zrejme tabuľku až tak nepotrebovali.

Kapitola 2

Rovnica spojitosti pre látku

V tejto kapitole odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu, ktorú musí spĺňať hustota hmotnosti, tzv. rovnicu spojitosti pre hustotu. V nasledujúcich dvoch kapitolách sa stretneme s podobnými rovnicami aj pre rýchlosť alebo hustotu vnútornej energie látky, ktoré majú podobnú štruktúru, ale sú konceptuálne náročnejšie. S podobnou rovnicou spojitosti, no pre hustotu elektrického náboja sa stretávame v kurze elektriny a magnetizmu v súvislosti s 1. Kirchhoffovým zákonom, alebo pri štúdiu fyziky reaktorov pri opise koncentrácie neutrónov. Dobré porozumenie rovnicam spojitosti predstavuje potrebný matematický základ k štúdiu problematiky prestupu tepla. Tradične téma rovníc spojitosti býva zaradená do učebníc mechaniky deformovateľných telies [11], hydrodynamiky [12] alebo nerovnovážnej termodynamiky [13].

2.1 Hustota a rýchlostné pole

Nech ΔV je objem priestoru v okolí polohového vektora \vec{r} . V tomto objeme sa v čase t nachádza N častíc toho istého druhu s hmotnosťou m . Hustotu hmotnosti látky v mieste \vec{r} v čase t nazývame veličinu ¹,

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{\sum_{i=1}^N m}{\Delta V}. \quad (2.1.1)$$

Pretože sa častice neustále pohybujú, bude ich počet, a teda aj ich celková hmotnosť v objeme ΔV fluktuovať. Aby boli tieto fluktuácie hmotnosti v objeme zanedbateľné voči jej priemernej hodnote, v zmysle centrálnej limitnej vety matematickej štatistiky, musí byť možné vybrať taký veľký objem,

¹Hovorovo, ak nemôže dôjsť k zámene, sa často používa názov *hustota*, aj keď máme na myslí hustotu hmotnosti.

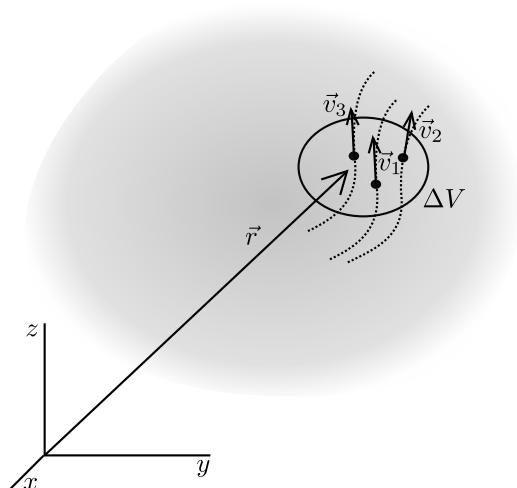
v ktorom je ich dostatočné množstvo. Preto musí byť objem ΔV *dostatočne veľký*.

Na druhej strane, hustota $\rho(\vec{r}, t)$ predstavuje lokálnu veličinu, ktorá sa od miesta k miestu môže meniť. Ak by sme zvolili objem ΔV príliš veľký, nebudeme schopní tieto rozdiely hustoty medzi susednými miestami opísať. Z tohto dôvodu musí byť objem ΔV aj *dostatočne malý* v porovnaní so vzdialenosťami, na ktorých sa hustota významne mení (t. j. keď je jej zmena porovnateľná s jej hodnotou).

Objem ΔV , ktorý spĺňa tieto dve nerovnosti, budeme nazývať *fyzikálne limitne malý objem* a definíciu hustoty môžeme napísať v tomto zmysle ako limitu

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N m_i}{\Delta V}. \quad (2.1.2)$$

Pomocou fyzikálne malého objemu možno zaviesť aj pojem *rýchlostného poľa* látky. V nasledujúcej časti uvidíme, že pre častice toho istého druhu je rýchlostné pole $\vec{v}(\vec{r}, t)$ dané priemernou rýchlosťou častíc látky vo fizi-



Obr. 2.1.1: Fyzikálne malý element objemu ΔV nachádzajúci sa na mieste \vec{r} , v ktorom sa nachádza dostatočne veľký počet častíc látky. Tu pre názornosť sú zobrazené len tri. Každá častica v ΔV má určitú rýchlosť a rýchlostné pole v mieste \vec{r} je dané ich priemernou rýchlosťou.

kálne limitne malom objeme v \vec{r} a čase t ,

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \vec{v}_i(t)}{N}. \quad (2.1.3)$$

2.2 Tok hmotnosti a hustota toku hmotnosti

Tok hmotnosti udáva hmotnosť látky, ktorá prejde vybranou plochou S za jednotku času,

$$J_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}, \quad [J_m] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \quad (2.2.1)$$

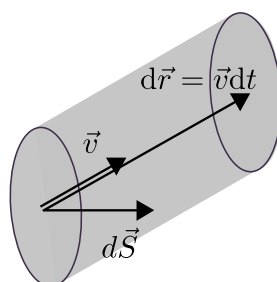
Na začiatok uvažujme príspevok k toku len od tých častíc, pre ktoré je vektor rýchlosti \vec{v} nadobúda hodnoty z infinitezimálnej oblasti d^3v . Hustotu hmotnosti týchto častíc označíme $d\rho_v = \rho_v d^3v$, a teda pre hustotu hmotnosti častíc bude platiť $\rho = \int \rho_v d^3v$, pričom integrujeme cez všetky možné hodnoty vektora rýchlosti častíc.

Tok hmotnosti častíc s rýchlosťou v v d^3v cez vybranú plochu S môžeme spočítať, ak túto plochu rozdelíme na elementárne plôšky $d\vec{S}$. Za krátky interval času dt prejde plôškou dS nasledovná hmotnosť častíc s uvažovanou rýchlosťou (Obr. 2.2.1)

$$dm_v = d\rho_v dV = d\rho_v \vec{v} dt \cdot d\vec{S} \quad (2.2.2)$$

a teda celkovou plochou S prejde celková hmotnosť

$$dm = \int_S \int d^3v \rho_v \vec{v} dt \cdot d\vec{S} \quad (2.2.3)$$



Obr. 2.2.1: Ak je rýchlosť kvapaliny \vec{v} , potom objem kvapaliny, ktorý pretečie plôškou $d\vec{S}$ za čas dt je daný objemom zobrazeného nakloneného valca s podstavou dS a výškou danou priemetom vektora $d\vec{r}$ do smeru vektora $d\vec{S}$.

Ak zavedieme *rýchlostné pole* látky predpisom

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\rho(\vec{r}, t)} \int d^3v \rho_v(\vec{r}, t) \vec{v} \quad (2.2.4)$$

potom z definície toku hmotnosti nakoniec nachádzame

$$J_m = \frac{dm}{dt} = \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (2.2.5)$$

Podintegrálnu vektorovú veličinu nazývame *hustota toku hmotnosti*

$$\vec{j}_m = \rho \vec{v}, \quad [j_m] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \quad (2.2.6)$$

Podobne sa definuje aj *tok kvapaliny* a *hustota toku kvapaliny*

$$J_V = \frac{dV}{dt}, \quad (2.2.7)$$

$$J_V = \int \vec{j}_V \cdot d\vec{S}, \quad \vec{j}_V = \vec{v}. \quad (2.2.8)$$

Tok kvapaliny udáva množstvo objemu kvapaliny, ktoré prechádza špecifikovanou plochou za jednotku času.

Úloha 2.2.1 Laminárne prúdenie v potrubí s kruhovým prierezom má rýchlostný profil daný výrazom $v(r) = v_M(1 - r^2/R^2)$, kde r je vzdialenosť od osi potrubia a R je vnútorný polomer potrubia. (1) Spočítajte tok hmotnosti potrubím, (2) nájdite priemernú rýchlosť prúdenia zavedenú tým spôsobom, že jej prenásobením plochou prierezu potrubia a hustotou získame správny tok hmotnosti potrubím.

Riešenie: (1) $J_m = (\pi/2)\rho v_M R^2$, (2) $v_{av} = v_M/2$.

Úloha 2.2.2 Presvedčte sa, že predpis pre rýchlostné pole (2.2.4) je zhodný s priemernou rýchlosťou častíc rovnakého druhu zavedenou v rovnici (2.1.3).

2.3 Rovnica spojitosti pre hustotu, Eulerov pohľad

S Eulerovým menom spájame opis spojitého prostredia pomocou rýchlosti a hustoty ako funkcií priestoru a času, t. j. ako fyzikálnych polí. Zmeny veličín s časom vyhodnocujeme v nemennom mieste, t. j. nie viazane na vybraný

pohyblivý hmotnostný element. Využívame pri tom parciálnu deriváciu polí podľa času, ktorá bude vystupovať v takejto forme rovnice spojivosti.

V oblasti, kde sa nachádza pohybujúca sa látka, uvažujme vydelenú nemennú časť priestoru s veľkosťou objemu V a ohraničenú uzavretou nepohyblivou plochou S . Hmotnosť látky, ktorá sa nachádza v tejto časti priestoru, sa mení v dôsledku jej prítoku alebo odtoku cez hranicu S . Za jednotku času toto predstavuje hmotnosť

$$J_m = - \oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV, \quad (2.3.1)$$

kde sme pri úprave použili Gaussovu vetu a zápis divergencie pomocou *nabla operátora*,

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.3.2)$$

Záporné znamienko je dôležité: samotný integrál predstavuje hmotnosť prechádzajúcu cez plochu v smere orientácie plochy danej vektormi $d\vec{S}$. Pre uzavretú plochu sa konvenčne volí táto orientácia v smere *vonkajšej* normály plôšok dS , a preto bez znamienka „-“ by predstavoval integrál tok hmotnosti *von* z oblasti s objemom V .

Na základe týchto úvah môžeme písať pre zmenu hmotnosti látky v oblasti bilančnú rovnicu

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV \quad (2.3.3)$$

Nakoľko hranice integrovania sa v čase nemenia (vybrali sme nehybnú plochu S ohraničujúcu objem V), môžeme zameniť poradie derivovania podľa času a integrovania,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV \quad (2.3.4)$$

Symbol časovej derivácie sme pritom museli zapísať ako parciálnu deriváciu, pretože hustota je funkciou nie len času, ale aj priestoru.

Rovnica (2.3.4) musí platiť pre ľubovoľne vybranú oblasť. Ak je táto oblasť fyzikálne limitne malá, t. j. $V \rightarrow \Delta V$, možno nahradiť integrovanie s hodnotou integrandu v mieste objemu ΔV a potom rovnicu týmto objemom rovnicu predeliť, čím nachádzame rovnicu spojivosti pre hustotu hmotnosti látky

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \nabla \cdot (\rho \vec{v}). \quad (2.3.5)$$

Úloha 2.3.1 Priamym výpočtom plošného integrálu po guľovej ploche so stredom v počiatku súradníc sa presveďte, že pre vektorové pole $a\vec{r}$ platí Gaussova veta.

2.4 Hydrodynamická derivácia a Lagrangeov pohľad

Hydrodynamickú deriváciu využívame na vyčíslenie časových zmien fyzikálnych veličín, napríklad rýchlosti, hustoty alebo teploty, ak ich vzťahujeme na pohybujúci sa hmotnostný element látky. Takýto prístup k opisu veličín v hydrodynamike je spájaný s menom Josepha Lagrangea. Matematický tvar rovnice kontinuity s hydrodynamickou deriváciou budeme využívať pri formulovaní rovníc nerovnovážnej termodynamiky, v rámci ktorej je predstava veličín asociovaných s pohybujúcou sa látkou kľúčová.

Uvažujme fyzikálne malý objem $\Delta V(t)$, ktorého hraničná plocha $S(t)$ sa pohybuje priemernou rýchlosťou látky 2.1.3. Hmotnosť takto zavedeného objemu bude nemenná, t. j.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0, \quad (2.4.1)$$

lebo hraničná plocha $S(t)$ sa pohybuje spolu s látkou.

Uvedený integrál možno pre fyzikálne limitne malý objem rozpísať takto:

$$\frac{d}{dt} (\Delta V(t) \rho(\vec{r}(t), t)) = 0 \quad (2.4.2)$$

Hustota v takomto pohybujúcom sa objeme sa mení v dôsledku prírastku času aj z dôvodu zmeny miesta za tento prírastok času,

$$\rho(t) = \rho(\vec{r}(t), t) \quad (2.4.3)$$

Pomocou *hydrodynamickéj derivácie* vyjadrujeme zmenu hustoty látky v čase v takto pohybujúcom sa hmotnostnom elemente,

$$\frac{d\rho}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(\vec{r}(t + \Delta t), t + \Delta t) - \rho(\vec{r}(t), t)}{\Delta t} \quad (2.4.4)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (2.4.5)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho) \cdot \vec{v} \quad (2.4.6)$$

Fyzikálny význam hydrodynamickej derivácie je vyčíslenie zmeny hustoty pohybujúceho sa hmotnostného elementu látky.

Pomocou hydrodynamickej derivácie môžeme prepísať rovnicu spojitosti pre hustotu (2.3.5)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot (\vec{v}\rho) + \vec{v} \cdot \nabla\rho = -\rho\nabla \cdot \vec{v} \quad (2.4.7)$$

t. j.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla \cdot \vec{v} \quad (2.4.8)$$

Pre nestlačiteľnú látku musí platiť $\frac{d\rho}{dt} = 0$, a teda túto vlastnosť možno vyjadriť ako podmienku na rýchlostné pole v tvare $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Rovnakú rovnicu spĺňa aj magnetické pole v dôsledku neexistencie magnetických monopólov – zdrojov magnetických siločiar. Magnetické siločiarly sú preto vždy uzavreté krivky a podobne sú na tom aj prúdnicie nestlačiteľnej kvapaliny.

Príklad 2.4.1 Spočítajte hydrodynamicnú deriváciu rýchlosti rovnomerne rotujúcej kvapaliny s konštantnou uhlovou rýchlosťou $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$.

Riešenie: V prvom rade, rýchlostné pole rovnomerne rotujúcej kvapaliny nezávisí explicitne od času, a preto $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 0$. Druhý príspevok k hydrodynamickej derivácii, $\vec{v} \cdot \nabla\vec{v}$, vyjadríme postupne takto:

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r}) &= \vec{\omega} \times \vec{r} = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j} \\ \nabla\vec{v} &= \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} \right) (-\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}) = \vec{i}\vec{j}\omega - \vec{j}\vec{i}\omega \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

$$\vec{v} \cdot \nabla\vec{v} = (-\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}) \cdot (\vec{i}\vec{j}\omega - \vec{j}\vec{i}\omega) = -\omega^2 y\vec{j} - \omega^2 x\vec{i} = -\omega^2\vec{r} \quad (2.4.10)$$

Všimnime si, že v rovnici (2.4.9) nie je medzi jednotkovými vektormi ani skalárne ani vektorové násobenie, ide o tzv. priamy alebo diadický súčin a výsledkom je tenzor. Vektory tam len „čakajú“, že ich sprava alebo zľava bude niečo násobiť skalárne, vektorovo, alebo aj priamo, ako vznikne potreba. V nasledovnom riadku to je práve skalárne násobenie zľava. S tenzormi sa ešte stretneme...

Výsledok (2.4.10) predstavuje dostredivé zrýchlenie pohybujúceho sa elementu kvapaliny, známe aj z kinematiky s tým rozdielom, že hovorí o vektorovom poli rýchlostí:

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(\vec{r}) = -\omega^2\vec{r} \quad (2.4.11)$$

Úloha 2.4.2 Ukážte, že rotačné rýchlostné pole $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$ opisuje prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny.

Úloha 2.4.3 Ukážte, že platí $\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\Delta V(t)} \frac{d}{dt} \Delta V(t)$, t. j. že divergencia rýchlostného poľa predstavuje relatívny nárast objemu elementárneho množstva látky. Použite pri tom rovnice (2.4.8) a (2.4.2). Alternatívne môžete uvážiť, že $\Delta V(t) = \Delta m / \rho(\vec{r}, t)$.

2.5 Rovnica spojitosti pre viaczložkovú sústavu

Sústava kladných iónov a vodivostných elektrónov v kove alebo plyn molekúl vodíka H_2 , kyslíka O_2 a produktu ich reakcie, vodnej pary, predstavujú príklady sústav skladajúcich sa z viacerých zložiek. Látkové množstvo každej zo zložiek je stavovou veličinou v termodynamickom zmysle. Namiesto látkového množstva možno použiť aj parciálnu hustotu zložky α , ktorú možno zaviesť podobne ako celkovú hustotu v časti 2.1:

$$\rho_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{\sum_{i=1}^{N_\alpha} m_\alpha}{\Delta V}, \quad (2.5.1)$$

kde vo fyzikálne malom objeme nachádzajúcim sa na mieste \vec{r} spočítavame hmotnosti len častíc zložky α . Priamym dosadením tejto defície do rovnice (2.1.1) sa presvečíme, že celková hustota je daná súčtom všetkých parciálnych hustôt,

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_\alpha. \quad (2.5.2)$$

Pri odvodení rovnice spojitosti pre parciálnu hustotu postupujeme podobne ako v časti 2.3 z bilancie hmotnosti. V tomto prípade ale musíme uvážiť, že zložky môžu spolu reagovať. V prípade plynu vodíka a kyslíka dochádza k ich zlúčeniu a vzniku vodnej pary, v prípade sústavy iónov a elektrónov sa môže voľný elektrón zachytiť na ióne, čím vytvorí časticu inej zložky – neutrálny atóm. Hmotnosť jednej zložky sa teda nemusí zachovávať. Na opis tejto skutočnosti zavedieme veličinu $\sigma_{m,\alpha}$ – produkciu hmotnosti zložky α , ktorá bude udávať hmotnosť zložky α , ktorá vznikne (reakciami, procesmi) v jednotke objemu za jednotku času. Z uvedeného vyplýva fyzikálna jednotka $[\sigma_{m,\alpha}] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$. Bilancia hmotnosti zložky má matematický zápis:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_\alpha dV = - \oint_S d\vec{S} \cdot \rho_\alpha \vec{v}_\alpha + \int_V \sigma_{m,\alpha} dV. \quad (2.5.3)$$

Použitím Gaussovej vety a uvažovaním ľubovoľnosti integračného objemu nachádzame rovnicu spojitosti pre každú zložku látky v tvare

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{v}_\alpha) + \sigma_{m,\alpha} \quad (2.5.4)$$

Celková hustota hmotnosti, daná rovnicou (2.5.2), spĺňa rovnicu spojitosti (2.3.5) s nulovou produkciou hmotnosti. Ukážeme si, že rovnice (2.3.5) a (2.5.4) sú konzistentné, ak výsledné makroskopické rýchlostné pole je definované ako *barycentrická rýchlosť*,

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\sum_\alpha \vec{v}_\alpha(\vec{r}, t) \rho_\alpha(\vec{r}, t)}{\sum_\alpha \rho_\alpha}, \quad (2.5.5)$$

podobne ako to bolo pri uvažovaní častíc toho istého druhu no s rôznymi rýchlosťami, v rovnici (2.2.4). Všimnime si, že barycentrická rýchlosť pripomína zavedenie rýchlosti ťažiska v dynamike sústavy hmotných bodov.

Spočítaním rovníc spojitosti hustoty pre všetky zložky nachádzame

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\sum_\alpha \vec{v}_\alpha \rho_\alpha \right) + \sum_\alpha \sigma_{m,\alpha}. \quad (2.5.6)$$

Pretože pri reakciách (napr. príklady viaczložkových sústav uvedených vyššie) sa celková hmotnosť zachováva, musí sa posledný člen identicky rovnať nule,

$$\sum_\alpha \sigma_{m,\alpha} = 0. \quad (2.5.7)$$

Výraz, na ktorý pôsobí divergencia, možno zapísať pomocou barycentrickej rýchlosti, čím nachádzame rovnicu spojitosti pre celkovú hustotu viaczložkovej sústavy,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}). \quad (2.5.8)$$

Rovnica je evidentne zhodná s rovnicou spojitosti pre jednozložkovú látku (2.3.5).

Nakoniec nájdeme zápis rovnice kontinuity pre zložku α pomocou hydrodynamickej derivácie. Zavedieme si *hmotnostný zlomok* zložky α v sústave

$$c_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\rho} \quad (2.5.9)$$

a hustotu difúzneho toku zložky α

$$\vec{j}_\alpha = \rho_\alpha (\vec{v}_\alpha - \vec{v}). \quad (2.5.10)$$

Vychádzajúc z 2.5.4 a použitím 2.5.8 dostaneme

$$\rho \frac{d}{dt} c_\alpha = -\nabla \cdot \vec{j}_\alpha + \sigma_{m,\alpha}. \quad (2.5.11)$$

Príklad 2.5.1 Uvažujme reakciu horenia vodíka, $2\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{H}_2\text{O}$. Nech $\alpha = 1$ predstavuje vodík H_2 , $\alpha = 2$ kyslík O_2 a $\alpha = 3$ produkt ich reakcie – vodu. Ak za jednotku času vznikne v objeme dV na mieste \vec{r} látkové množstvo vody

$$\frac{d^2 n_3}{dt} = \xi(\vec{r}, t) dV \quad (2.5.12)$$

potom

$$\begin{aligned} \sigma_{m,1} &= -M_{m,1} \xi(\vec{r}, t) \\ \sigma_{m,2} &= -M_{m,2} \frac{1}{2} \xi(\vec{r}, t) \\ \sigma_{m,3} &= +M_{m,3} \xi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

kde $M_{m,\alpha}$ sú molové hmotnosti jednotlivých zložiek a ξ charakterizuje rýchlosť reakcie vodíka s kyslíkom prepočítanú na jednotkový objem. Táto veličina bude závisieť od teploty a tlaku vody v mieste, v ktorom ju počítame. Tento proces mení určité množstvo vnútornej energie (chemickú väzbu na kinetickú energiu produktov), a preto je potrebné riešiť rovnice pre látkové koncentrácie zložiek spolu s bilančnou rovnicou pre vnútornú energiu.

Úloha 2.5.2 Presvedčte sa o platnosti rovnice (2.5.7) pre oxidáciu vodíka z príkladu 2.5.1 .

Úloha 2.5.3 Analogicky hustote hmotnosti zaveďte hustotu elektrického náboja ρ_q , hustotu elektrického prúdu \vec{j}_q a sformulujte zodpovedajúcu rovnicu spojitosti. Aká bude produkcia elektrického náboja pre sústavu elektrónov?

2.6 Mikroskopický a makroskopický opis látky

Formálne rovnako ako pri opise viaczložkovej sústavy možno pristupovať aj k mikroskopickému opisu látky zavedením rozdelenia častíc podľa ich rýchlosti, čo sme využili v časti 2.2 pri zavedení hustoty toku hmotnosti a rýchlostného poľa. Produkciu hmotnosti častíc $\sigma_{m,v}$ vybranej rýchlosti \vec{v} súvisí s ich urýchľovaním v dôsledku silového pôsobenia vonkajších síl a ostatných častíc

sústavy. Pri opise látky ako spojitého prostredia sa tento mikroskopický postup ukazuje ako zbytočne komplikovaný, nehľadáme rozdelenie častíc podľa rýchlosti. Na druhej strane, práve preto je nevyhnutné využívať termodynamický opis látky pomocou vnútornej energie, teploty a tlaku alebo tenzora mechanického napätia.

Kapitola 3

Rovnica spojitosti pre hybnosť

Na opis ideálne tuhých telies sa používa Newtonov pohybový zákon určujúci zrýchlenie telesa s určitou hmotnosťou, ak naň pôsobí sila. Zrýchlenie, rýchlosť aj poloha opisujú pohyb jeho ťažiska. V prípade spojitého prostredia preberá úlohu tejto rovnice pohybová rovnica látky, ktorú v tejto časti odvodíme, vychádzajúc už zo spomenutého Newtonovho zákona. Ako uvidíme, pohybová rovnica látky má tvar parciálnej diferenciálnej rovnice pre rýchlostné pole. Silové pôsobenie vnútri spojitkej látky opisujeme pomocou ďalekodosahových síl (gravitačné a elektromagnetické sily) a krátkodosahových síl. Krátkodosahové sily zahrňujú vzájomné mikroskopické silové pôsobenie častíc, z ktorých sa látka skladá. Toto pôsobenie efektívne opisujeme pomocou tenzora napätia.

3.1 Ďalekodosahové silové pôsobenie

Uvažujme množstvo látky s hustotou ρ , ktoré sa nachádza vo fyzikálne malom pohyblivom objeme $\Delta V(t)$ v mieste \vec{r} . Na každú jeho časticu s hmotnosťou m_i , rýchlosťou \vec{v}_i a elektrickým nábojom q_i (atómy, ióny, elektróny,...) pôsobia *ďalekodosahové sily*, ako je gravitačná alebo elektromagnetická sila, a preto celkovo na tento objem pôsobí ďalekodosahová sila

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left[m_i \vec{g} + q_i \left(\vec{E}(\vec{r}_i) + \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i) \right) \right], \quad (3.1.1)$$

kde pomocou indexu i spočítavame cez všetky častice nachádzajúce sa v objeme $\Delta V(t)$, \vec{E} je intenzita elektrického poľa a \vec{B} indukcia magnetického poľa.

Pomocou definície hustoty hmotnosti (2.1.1) zapíšeme príspevok gravitačnej sily pôsobiacej na uvažovaný objem v tvare

$$\vec{F}_g = \Delta V(t) \rho(\vec{r}, t) \vec{g}. \quad (3.1.2)$$

Gravitačná sila prepočítaná na jednotku hmotnosti látky preto jednoducho bude samotné gravitačné zrýchlenie

$$\vec{f}_g(\vec{r}, t) = \frac{\vec{F}_g}{\Delta V(t)\rho(\vec{r}, t)} = \vec{g}. \quad (3.1.3)$$

Vyjadrenie silového pôsobenia elektrického poľa je komplikovanejšie z dvoch dôvodov: (1) odlišné zložky látky majú odlišný elektrický náboj každej častice a (2) intenzita elektrického poľa môže výrazne závisieť od miesta aj času. Intenzitu v mieste i -tej častice rozvineme do Taylorovho radu v okolí polohového vektora \vec{r} pohyblivého objemu $\Delta V(t)$,

$$\vec{E}(\vec{r}_i) \approx \vec{E}(\vec{r}) + \nabla \vec{E} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}) + \dots \quad (3.1.4)$$

Príspevok prvého člena tohto rozvoja k sile pôsobiacej na častice v $\Delta V(t)$ možno napísať pomocou hustoty hmotnosti zložky α , ktorej častice majú hmotnosť m_α a elektrický náboj q_α ,

$$\vec{F}_e = \sum_i q_i \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \sum_{i_\alpha} m_{i_\alpha} = \vec{E}(\vec{r}) \sum_\alpha z_\alpha \rho_\alpha(\vec{r}) \Delta V(t) \quad (3.1.5)$$

kde $z_\alpha = q_\alpha/m_\alpha$ je špecifický náboj častíc zložky α , spočítavanie cez index α znamená cez všetky zložky a spočítavanie cez index i_α predstavuje súčet cez všetky častice zložky α . Preto elektrická sila prepočítaná na jednotku hmotnosti zložky α bude mať príspevok

$$\vec{f}_{e,\alpha}(\vec{r}, t) = z_\alpha \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (3.1.6)$$

Druhý člen v Taylorovom rozvoji elektrického poľa (3.1.4) je dôležitý, ak je súčet príspevkov pre všetky zložky nulový. Takáto situácia nastáva pre lokálne elektricky neutrálnu látku, $\sum_i q_i = 0$. Príspevok silového pôsobenia elektrického poľa pochádzajúci z lineárneho člena rozvoja možno potom vyjadriť pomocou elektrickej polarizácie $\vec{P}(\vec{r})$ látky,

$$\vec{F}_P = \sum_i (\nabla \vec{E}) \cdot \sum_i q_i \vec{r}_i = \vec{P}(\vec{r}) \cdot \nabla \vec{E}, \quad (3.1.7)$$

kde

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta V(t)} \sum_i q_i \vec{r}_i. \quad (3.1.8)$$

Okrem hustoty hmotnosti je potom nevyhnutné pracovať aj s polarizáciou ako makroskopickým fyzikálnym polom. Tejto problematike sa hlbšie venovať nebudeme, uviedli sme ju len pre rozšírenie obzoru čitateľa.

Nakoniec vyjadríme aj magnetickú časť Lorentzovej sily¹ pomocou hustoty toku hmotnosti zložky α ,

$$\vec{F}_m = \sum_i q_i \vec{v}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i) \approx \sum_\alpha \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left(\sum_{i_\alpha} m_{i_\alpha} \vec{v}_{i_\alpha} \right) \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (3.1.9)$$

$$= \sum_\alpha z_\alpha \Delta V(t) \rho_\alpha \vec{v}_\alpha \times \vec{B} \quad (3.1.10)$$

Sila na jednotku hmotnosti zložky α v dôsledku prítomnosti magnetického poľa bude

$$\vec{f}_{b,\alpha} = z_\alpha \vec{v}_\alpha \times \vec{B} \quad (3.1.11)$$

Vo všeobecnosti teda vieme napísať vzťah pre ďalekodosahové sily pôsobiace na látku v objeme $\Delta V(t)$ v tvare

$$\vec{F}(t) = \Delta V(t) \sum_\alpha \rho_\alpha(\vec{r}, t) \vec{f}_\alpha(\vec{r}, t) \quad (3.1.12)$$

a celková ďalekodosahová sila pôsobiaca na jednotku objemu má tvar

$$\frac{\vec{F}}{\Delta V(t)} = \sum_\alpha \rho_\alpha \vec{f}_\alpha \quad (3.1.13)$$

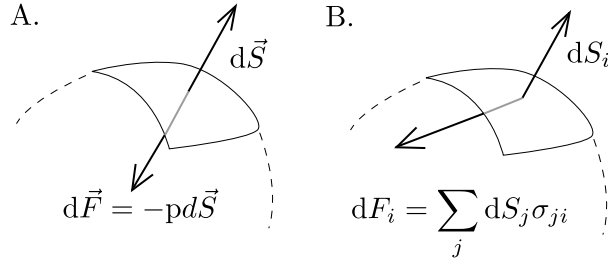
3.2 Krátkodosahové silové pôsobenie

Okrem ďalekodosahových síl pôsobia na častice pohyblivého objemu $\Delta V(t)$ aj krátkodosahové sily, ktoré opisujeme pomocou *tenzoru napätia*. Najjednoduchší prípad tenzoru napätia predstavuje hydrostatický tlak v tekutine v pokoji. V tomto prípade má silové pôsobenie smer vždy rovnobežný s orientáciou plôšky povrchu², na ktorú pôsobí (obr. 3.2.1 A). Vo všeobecnosti môže mať sila aj iný smer ako je normála plôšky (obr. 3.2.1 B), čo vyžaduje zaviesť pojem tenzora. Výslednú silu pôsobiacu na pohyblivý objem možno potom napísať v tvare

$$\vec{F} = \oint_{S(t)} d\vec{F} = \oint_{S(t)} d\vec{S} \cdot \vec{\sigma} \quad (3.2.1)$$

¹Už bez uváženia Taylorovho rozvoja indukcie magnetického poľa. Ak by sme ho uvážili, bolo by potrebné zaviesť nové makroskopické pole - magnetizáciu látky, podobne ako pri elektrickom poli sme potrebovali zaviesť polarizáciu.

²Samotná orientácia vektora plôšky je kolmá na rovinu plôšky, a preto silové pôsobenie tlaku možno slovne opísať aj tak, že je kolmé na rovinu plôšky. Preto *kolmosť na rovinu plôšky a rovnobežnosť s vektorom plôšky* hovoria o tej istej orientácii silového pôsobenia.



Obr. 3.2.1: Silové pôsobenie na látku nachádzajúcu sa na vnútornej strane plošného elementu $d\vec{S}$ v prípade diagonálneho tenzora napätia, t. j. tlaku (A) a v prípade všeobecného tenzora napätia (B).

kde $\vec{\sigma} = \sigma_{xx}\vec{i}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{i}\vec{j} + \dots + \sigma_{yz}\vec{j}\vec{k} + \sigma_{zz}\vec{k}\vec{k}$ je matematický zápis *tenzora mechanického napätia* (z angl. *stress tensor*). V rámci úloh prestupu tepla predstavuje tenzor napätia veličinu, ktorej zložky σ_{ij} s rôznou mierou presnosti možno považovať za lokálne funkcie stavových veličín látky (lokálna deformácia látky, pružnosť tuhých telies) a prípadne aj priestorových zmien rýchlosti látky (viskozita). Fyzikálna jednotka tenzora napätia je 1 pascal, rovnako ako tlak.

Ak vektory z rovnice (3.2.1) rozpíšeme na zložky,

$$d\vec{F} = (dF_x, dF_y, dF_z) \quad (3.2.2)$$

$$d\vec{S} = (dS_x, dS_y, dS_z), \quad (3.2.3)$$

vzťah medzi týmito dvoma vektormi je podľa (3.2.1) daný maticou

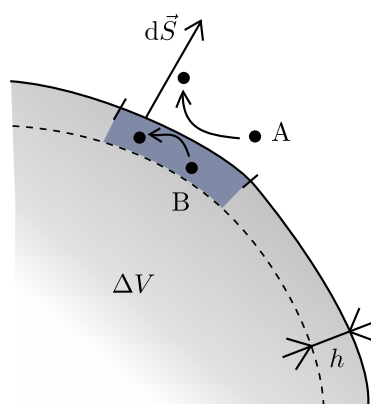
$$(dF_x, dF_y, dF_z) = (dS_x, dS_y, dS_z) \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (3.2.4)$$

Z napísaného je zjavné, že vďaka tenzorovému (maticovému) charakteru mechanického napätia, môže mať vektor sily iný smer ako je smer plôšky, na ktorú pôsobí.

Uvedený maticový výraz možno stručnejšie napísať pomocou indexov i, j ktoré môžu nadobúdať jeden zo symbolov karteziánskych zložiek x, y alebo z ,

$$dF_i = \sum_{j=x}^z dS_j \sigma_{ji}, \quad i = x, y, z. \quad (3.2.5)$$

Zápis tenzorových rovníc pomocou indexov budeme často využívať.



Obr. 3.2.2: Tenzor napätia môžeme motivovať ako prenos hybnosti od častíc okolitej látky (A) na častice látky (B) v skúmanom objeme ΔV prostredníctvom ich zrážok, t. j. krátkodosahového pôsobenia. Toto sa realizuje len v mikroskopicky malej časti objemu v hĺbke h pod elementami povrchu $d\vec{S}$ ohraničujúcich objem ΔV .

Jednoduchý fyzikálny mechanizmus vzniku tenzora napätia možno vysvetliť pomocou atomárnej predstavy o látke. Uvažujme silové pôsobenie na častice vybraného objemu, ktoré sa nachádzajú v tenkej vrstve s hrúbkou h na vnútornej strane plošného elementu $d\vec{S}$ plochy $S(t)$. Tieto sa zrážajú s časticami, ktoré nepatria do objemu $V(t)$ ³ (Obr. 3.2.2).

Ak si predstavíme, že vplyvom tohto pôsobenia získala za okamih času Δt častica v priemere hybnosť $\Delta\vec{P}$, potom nárast hybnosti častíc v objeme $\Delta V(t)$ za jednotku času, t. j. silu krátkodosahového pôsobenia môžeme zapísať v tvare

$$\vec{F} = \oint_{S(t)} h dS N_A c(\vec{r}, t) \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \quad (3.2.6)$$

kde hdS je objem tenkej vrstvy s hrúbkou h na vnútornej strane plošného elementu $d\vec{S}$, $N_A c(\vec{r}, t)$ je počet častíc na jednotku objemu vyjadrený pomocou molárnej koncentrácie a Avogadrovej konštanty.

Tento výraz zapíšeme ako plošný integrál použitím vonkajšej normály \vec{n}

³Vzájomne silové pôsobenie častíc v objeme $V(t)$ nemusíme uvažovať, lebo príspevok týchto síl ku celkovej sile pôsobiacej na objem $V(t)$ je nulový v dôsledku zákona akcie-reakcie.

plôšky dS :

$$\vec{F} = \oint_{S(t)} h d\vec{S} \cdot \vec{n} N_{Ac}(\vec{r}, t) \frac{\Delta \vec{\mathcal{P}}}{\Delta t} \quad (3.2.7)$$

$$= \oint_{S(t)} d\vec{S} \cdot \vec{\sigma}. \quad (3.2.8)$$

Vidíme, že uvedený fyzikálny mechanizmus dokážeme zapísať pomocou tenzora mechanického napätia.

Tenzorový charakter napätia vychádza z prítomnosti dvoch nezávislých smerov v jeho definícii: smer plôšky \vec{n} , ku ktorej patrí príspevok k celkovej sile a smer hybnosti $\vec{\mathcal{P}}$, ktorú získavajú častice tenkej vrstvy v zrážkach s okolím. Smer nadobudnutej hybnosti $\vec{\mathcal{P}}$ určuje aj smer príspevku ku výslednej sile \vec{F} pôsobiacej na látku v študovanom objeme $V(t)$.

V prípade tekutín v pokoji je priemerná hybnosť, ktorú získavajú častice tenkej vrstvy od okolia, orientovaná vždy kolmo na plôšky dS . Ak vonkajšie častice *zvyšujú* hybnosť vnútorným časticiam v smere $-\vec{n}$, potom $\Delta \vec{\mathcal{P}} = -\Delta \mathcal{P} \vec{n}$, kde $\Delta \mathcal{P} > 0$ a celkovú silu vieme napísať v tvare

$$\vec{F} = \oint_{S(t)} h d\vec{S} N_{Ac}(\vec{r}, t) \frac{-\Delta \mathcal{P}}{\Delta t} = - \oint_{S(t)} d\vec{S} p. \quad (3.2.9)$$

Ak by sme uvažovali množstvo rovnovážnej práce vykonanej na tekutine v dôsledku takéhoto silového pôsobenia, zistili by sme, porovnaním s vyjadrením objemovej práce v termodynamike, že veličina p je zhodná s termodynamickým stavovým parametrom nazývaným *tlak*⁴.

Rovnicu (3.2.9) možno zapísať aj vo forme tenzora napätia

$$\vec{\sigma} = -p(\vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k}). \quad (3.2.10)$$

a hovoríme, že tlak reprezentuje diagonálny tenzor napätia. O platnosti tejto identity sa možno presvedčiť dosadením rovnice (3.2.10) do rovnice (3.2.8).

Tenzor $\vec{1} = \vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k}$ nazývame aj tenzorová jednotka, pretože pre ľubovoľný vektor \vec{r} platí $(\vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k}) \cdot \vec{r} = \vec{r}$.

Zložky tenzora získame podobne ako pri vektoroch, skalárnym násobením s jednotkovými vektormi.

$$\sigma_{xx} = \vec{i} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{i}, \quad \sigma_{xy} = \vec{i} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{j}, \quad \sigma_{xz} = \vec{i} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \quad (3.2.11)$$

$$\sigma_{yx} = \vec{j} \cdot \vec{\sigma} \cdot \vec{i}, \quad \dots \quad (3.2.12)$$

⋮

⁴Pozor, tlak p je samozrejme niečo úplne iné ako veľkosť vektora hybnosti $\mathcal{P} = |\vec{\mathcal{P}}|$. S hybnosťou veľmi pracovať nebudeme, a preto sa s touto blízkosťou značení stretávame len na tomto mieste.

Tvar silového pôsobenia krátkodosahových síl môžeme napísať v tvare objemového integrálu použitím Gaussovej vety vo vyjadrení (3.2.8)

$$\vec{F} = \oint_{S(t)} d\vec{S} \cdot \vec{\sigma} = \int_{V(t)} \nabla \cdot \vec{\sigma} dV \quad (3.2.13)$$

kde divergencia tenzora napätia má zložky

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k}) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \dots) \quad (3.2.14)$$

V prípade tenzora napätia obsahujúceho len tlak sa tento výraz zjednoduší

$$\nabla \cdot [-p(\vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k})] = -\nabla p, \quad (3.2.15)$$

t. j. miesto divergencie tenzora je potrebné vyčísliť gradient tlaku.

Ak zavedieme označenie zložiek polohového vektora $x = x_x, y = x_y$ a $z = x_z$, potom divergencia tenzora má zložky

$$(\nabla \cdot \vec{\sigma})_i = \sum_{j=x}^z \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji}, \quad i = x, y, z$$

čo v prípade tlaku, $\sigma_{ji} = -p\delta_{ji}$ vedie na výraz

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} p, \quad i = x, y, z$$

predstavujúci i -tú zložku gradientu tlaku.

Úloha 3.2.1 Ukážte, že priamym dosadením rovnice (3.2.10) do rovnice (3.2.8) dostaneme posledný výraz v rovnici (3.2.9).

Úloha 3.2.2 Opíšte výpočet vztlakovej sily pôsobiacej na teleso v tvare kvádra, ktoré je ponorené vo vode. Využite pri tom posledné vyjadrenie sily v rovnici (3.2.9). Hydrostatický tlak vo vode je daný známym predpisom $p(h) = p_a + h\rho g$, kde p_a je atmosferický tlak, h hĺbka miesta pod hladinou, ρ hustota vody a g gravitačné zrýchlenie.

Úloha 3.2.3 Rozpisom do zložiek sa presveďte, že Gaussova veta pre tenzové pole použitá v rovnici (3.2.13) predstavuje trojnásobné použitie Gaussovej vety pre jednotlivé zložky sily.

Riešenie: Napríklad, pre x -ovú zložku

$$F_x = \oint \sum_i dS_i \sigma_{ix} = \oint d\vec{S} \cdot \vec{X}$$

kde pomocné označenie predstavuje „vektorové“ pole $\vec{X} = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{yx}\vec{j} + \sigma_{zx}\vec{k}$.

Úloha 3.2.4 Ukážte, že platí (3.2.15) priamym aplikovaním gradientu v kartézskych súradniciach na ľavej strane rovnice.

3.3 Pohybová rovnica pre látku

Látka nachádzajúca sa v pohyblivom objeme $V(t)$ má nemennú hmotnosť, a preto očakávame, že pre ňu bude platiť Newtonov pohybový zákon ($m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$). Použitím vyjadrenia pre ďalekodosahové (3.1.13) a krátkodosahové (3.2.8) sily napíšeme tento zákon v tvare

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \int_{V(t)} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} dV + \int_{V(t)} \nabla \cdot \vec{\sigma} dV. \quad (3.3.1)$$

Podobne ako pri rovnici spojitosti pre hustotu, aj táto integrálna rovnica musí platiť pre ľubovoľný pohyblivý objem $V(t)$. Preto ak vyberieme fyzikálne limitne malý objem, nájdeme

$$\frac{d}{dt} \rho(\vec{r}(t), t) \vec{v} \Delta V(t) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} \Delta V(t) + \nabla \cdot \vec{\sigma} \Delta V(t). \quad (3.3.2)$$

$\rho(t) \Delta V(t) = \Delta m$ je hmotnosť látky v pohyblivom objeme, ktorá je podľa rovnice kontinuity pre hustotu nemenná, a preto môžeme tento faktor vybrať pred hydrodynamickú deriváciu na ľavej strane rovnice; ďalším predelením objemom $\Delta V(t)$ dostaneme rovnicu pre rýchlosť prúdenia látky

$$\rho \frac{d}{dt} \vec{v} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} + \nabla \cdot \vec{\sigma}. \quad (3.3.3)$$

Diferenciálna rovnica pre časový vývoj rýchlostného poľa sa získa rozpísaním hydrodynamickej derivácie:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} + \nabla \cdot \vec{\sigma}. \quad (3.3.4)$$

Druhý člen na ľavej strane tejto rovnice je inherentne nelineárny (kvadratický vzhľadom na rýchlostné pole). Pre neho neplatí v hydrodynamike princíp superpozície a všeobecné riešenie nedokážeme nájsť. Táto nelinearita priamo súvisí aj so vznikom turbulentného prúdenia.

Príklad 3.3.1 Nájdite závislosť tlaku od miesta v rovnomerne rotujúcej nestlačiteľnej kvapaline. Predpokladajte, že rýchlostné pole má tvar $\vec{v} = \omega \vec{k} \times \vec{r}$ a musí spĺňať svoju pohybovú rovnicu.

Riešenie: Pohybová rovnica v tomto prípade má tvar

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p - \rho g \vec{k} \quad (3.3.5)$$

Úpravou hydrodynamickej derivácie nájdeme $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\rho \omega^2 r \vec{e}_r$ kde \vec{e}_r je jednotkový radiálny vektor v cylindrických súradniciach. Gradient tlaku v cylindrických súradniciach bude mať len dve zložky,

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z. \quad (3.3.6)$$

Dosadením do pohybovej rovnice a prenasobením skalárne s \vec{e}_r a \vec{e}_z nájdeme dve rovnice,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \quad (3.3.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3.3.8)$$

Ich integrovaním a použitím vhodných okrajových podmienok nájdeme výsledok

$$p(r, z) = p_a + \rho g(z_{\max} - z) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \quad (3.3.9)$$

Tvar hladiny rotujúcej kvapaliny $z(r)$ nájdeme z rovnice $p_a = p(r, z(r))$.

Príklad 3.3.2 Ukážte, že rovnica continuity pre hustotu a hybnosť vedú pre plyn a ideálnu kvapalinu na vlnovú rovnicu pre zvukové vlny hustoty. Pri oboch predpokladajte, že lokálne je tlak daný hustotou podľa vzťahu všeobecnej polytropy $p(\rho) = k\rho^\gamma$. Nájdite hodnoty k a γ pre prípad, že ide o adiabatický dej ideálneho plynu. Z posledného predpokladu určte číselnú hodnotu rýchlosti zvuku a porovnajte ju s tabulkovou hodnotou.

Riešenie: Zvukové vlny predstavujú malé výchylky hustoty, tlaku a rýchlosti okolo ich rovnovážnych hodnôt. V prípade látky v pokoji môžeme pre tieto výchylky písať,

$$\delta\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) - \rho_0 \quad (3.3.10)$$

$$\delta p(\vec{r}, t) = p(\vec{r}, t) - p_0 \quad (3.3.11)$$

$$\delta\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (3.3.12)$$

Z pohybovej rovnice látky v lineárnom priblížení nájdeme (hyrdodynamická derivácia prejde v lineárnom priblížení len na parciálnu)

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \delta p \quad (3.3.13)$$

a gradient tlaku vyjadríme pomocou gradientu hustoty, lebo medzi nimi je funkcionálny vzťah daný polytropou,

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{dp}{d\rho} \nabla \delta \rho. \quad (3.3.14)$$

Podobne z rovnice kontinuity v lineárnom priblížení nájdeme

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}. \quad (3.3.15)$$

Výsledok ešte raz zderivujeme podľa času a výsledok dosadíme do (3.3.14),

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{dp}{d\rho} \nabla \rho \right). \quad (3.3.16)$$

Ak zanedbáme priestorové zmeny rovnovážnej hustoty, nachádzame vlnovú rovnicu pre výchylku hustoty

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{dp}{d\rho} \nabla^2 \rho. \quad (3.3.17)$$

Jej riešeniami sú rovinné vlny

$$\rho(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3.3.18)$$

pre ktoré je rýchlosť šírenia

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

Pre adiabatický dej je $p(\rho) = k\rho^\kappa$, kde $\kappa = c_p/c_V$ a $k = p_a/\rho_a^\kappa$. Pre rýchlosť zvuku tak nachádzame

$$v = \sqrt{\kappa \frac{p_a}{\rho_a}}$$

Pre vzduch pri $\vartheta = 20^\circ\text{C}$, $p_a = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$, $\rho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a $\kappa = 7/5$. Výsledok pre rýchlosť zvuku vo vzduchu teda je $v = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, v dobrom súhlase s meraním.

Kapitola 4

Rovnice spojitosti pre energiu

V nasledujúcej kapitole odvodíme rovnicu spojitosti pre vnútornú energiu, základnú rovnicu pre opis teplotného poľa v látke. Odvodenie pozostáva z troch krokov. Najprv odvodíme rovnicu spojitosti pre hustotu makroskopickej kinetickej energie. Potom sformulujeme rovnicu spojitosti pre hustotu celkovej energie. Nakoniec vnútornú energiu identifikujeme ako rozdiel celkovej a makroskopickej kinetickej energie a pomocou tohto nájdeme aj samotnú rovnicu kontinuity pre hmotnostnú vnútornú energiu.

4.1 Hustoty celkovej, kinetickej a vnútornej energie

Hustotu makroskopickej kinetickej energie spojito rozloženej látky *definujeme* pomocou celkovej hustoty látky a jej barycentrickej rýchlosti

$$e_k(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \rho(\vec{r}, t) v^2(\vec{r}, t), \quad [e_k] = \text{J} \cdot \text{m}^{-3} \quad (4.1.1)$$

Pomocou nej vieme vyjadriť makroskopickú kinetickú energiu látky v konečnom objeme

$$E_k = \int_V e_k(\vec{r}, t) dV. \quad (4.1.2)$$

Hustota kinetickej energie e_k sa líši od veličiny, ktorú by sme dostali súčtom mikroskopických kinetických energií častíc vo fyzikálne malom objeme,

$$\tilde{e}_k(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2}{\Delta V}, \quad (4.1.3)$$

nakoľko vo všeobecnosti kvadrát strednej hodnoty rýchlosti sa líši od strednej hodnoty kvadrátu rýchlostí,

$$\langle v^2 \rangle = \langle v \rangle^2 + \langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle. \quad (4.1.4)$$

Časť mikroskopickej kinetickej energie súvisiaca s druhým členom v poslednej rovnici patrí spolu so vzájomnými interakciami medzi časticami do vnútornej energie látky U . V rámci hydrodynamického opisu uvažujeme pohyblivý element s nemennou hmotnosťou $\Delta m = \rho \Delta V(t)$. Preto vyjadríme jeho vnútornú energiu v tvare $\Delta U = u \Delta m = u \rho \Delta V(t)$, kde u má význam *vnútornej energie látky na jednotku jej hmotnosti* alebo tiež *hmotnostnej vnútornej energie*¹. Vnútorná energia konečnej oblasti látky sa potom vyjadří pomocou integrálu,

$$U = \int_V \rho(\vec{r}, t) u(\vec{r}, t) dV, \quad [u] = \text{J.kg}^{-1}. \quad (4.1.5)$$

Vnútorná a kinetická energia predstavujú *celkovú energiu látky*²

$$E = E_k + U = \int_V (e_k + \rho u) dV = \int_V e dV \quad (4.1.6)$$

Ak budeme uvažovať nehybný objem V , tak celková energia látky v ňom sa môže meniť, len ak vonkajšie sily na nej konajú prácu, alebo ak doň vstupuje energia tokom cez jeho hraničnú plochu. Preto hustota celkovej energie musí spĺňať rovnicu spojitosti v tvare

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}_e + \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha}, \quad (4.1.7)$$

kde \vec{j}_e predstavuje hustotu toku celkovej energie. Vyjadrenie pre túto veličinu upresníme neskôr, no už teraz uvedme, že okrem konvektívneho toku energie, ktorú prináša prúdiaca látka, obsahuje napríklad aj hustotu toku tepla.

Posledný člen v rovnici (4.1.7) predstavuje prácu vonkajších síl, vykonanú na jednotke objemu za jednotku času; napríklad pre jednu zložku látky

$$\frac{1}{\Delta V} \vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1 = \rho \vec{f}_1 \cdot \vec{v}_1.$$

¹Starší, ale v súčasnosti už nespisovný názov je špecifická vnútorná energia.

²V mechanike sa do celkovej mechanickej energie telesa často zahŕňa aj potenciálna energia telesa v určitom potenciálovom silovom poli. V tejto učebnici budeme uvažovať účinok potenciálových silových polí explicitne prostredníctvom práce konanej na látke.

Pri všeobecnej diskusii rovníc spojitosti tento člen nazývame produkciou veličiny, ktorej sa daná rovnica spojitosti týka. Preto ho nazývame aj *produkciou celkovej energie* a označujeme³ σ_e .

Úloha 4.1.1 Ukážte, že pre disperziu náhodnej veličiny platí vzťah (4.1.4).

4.2 Rovnica spojitosti pre makroskopickú kinetickú energiu

Vyjdeme z pohybovej rovnice látky (3.3.3), ktorej ľavú aj pravú stranu skalárne vynásobíme s rýchlostným polom \vec{v} a pre jednoduchosť budeme uvažovať, že tenzor napätia má diagonálny tvar

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} \quad \Big| \cdot \vec{v} \quad (4.2.1)$$

$$\rho \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = -\vec{v} \cdot \nabla p + \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} \cdot \vec{v}. \quad (4.2.2)$$

V nasledujúcich úpravách sa snažíme o vyjadrenie časovej derivácie hustoty makroskopickej kinetickej energie. Preto na ľavej strane rovnice vťahujeme aj hustotu pod operáciu derivovania a nájdené vyjadrenie upravíme:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) - \frac{1}{2} v^2 \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot (\vec{v}p) + p \nabla \cdot \vec{v} + \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \underbrace{\vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \frac{1}{2} v^2 \rho \nabla \cdot \vec{v}}_{\nabla \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v}} = -\nabla \cdot (\vec{v}p) + p \nabla \cdot \vec{v} + \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right)}_{e_k} = -\nabla \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v} + p \vec{v} \right)}_{\vec{j}_{e_k}} + \underbrace{p \nabla \cdot \vec{v} + \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} \cdot \vec{v}}_{\sigma_{e_k}} \quad (4.2.3)$$

V získanej rovnici spojitosti identifikujeme *hustotu toku kinetickej energie*,

$$\vec{j}_{e_k} = \frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v} + p \vec{v} \quad (4.2.4)$$

³Gréckym symbolom σ označujeme aj produkciu rôznych veličín, aj tenzor napätia. Ide o úplne odlišné veličiny a rozlišovať ich budeme tým, že tenzor napätia bude mať nad sebou aj dve šípky zvyrazňujúce jeho tenzorový charakter. Produkcia bude mať zase vždy index veličiny, ktorej sa týka.

Táto má okrem *konvektívnej časti* $\frac{1}{2}\rho v^2\vec{v} = e_k\vec{v}$ aj príspevok od tlaku $p\vec{v}$.

Ako tiež vidíme z (4.2.3), hustota kinetickej energie sa nezachováva, nakoľko má nenulovú produkciu,

$$\sigma_{e_k} = p\nabla \cdot \vec{v} + \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} \cdot \vec{v}. \quad (4.2.5)$$

Táto obsahuje napríklad konanie makroskopickej práce externými silami, ale aj premenu makroskopickej kinetickej energie na vnútornú energiu u , ako uvidíme v nasledujúcej časti.

Ak by sme v rovnici (4.2.1) uvažovali všeobecný prípad tenzora napätia, v rovnici (4.2.3), a teda aj v nasledujúcich výrazoch (4.2.4) a (4.2.5) by nastali nasledujúce zmeny členov s tlakom:

$$-p\vec{v} \rightarrow \vec{\sigma} \cdot \vec{v} \quad (4.2.6)$$

$$-p\nabla \cdot \vec{v} \rightarrow \vec{\sigma} : \nabla \vec{v} \quad (4.2.7)$$

„Dvojnásobný“ skalárny súčin medzi dvoma tenzormi, označený s „:“, je najjednoduchšie zaviesť v zložkovom tvare:

$$\vec{\sigma} : \nabla \vec{v} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (4.2.8)$$

kde $i, j = x, y, z$ a v tomto značení je napríklad $x_x = x, x_y = y$ a $x_z = z$.

Úloha 4.2.1 (1) Nájdite vyjadrenie pre tok kinetickej energie kvapaliny s hustotou ρ v potrubí s polomerom R . Rýchlostný profil je daný predpisom $v(r) = v_M(1 - r^2/R^2)$. (2) Nájdite vyjadrenie pre tok kinetickej energie pomocou priemernej rýchlosti prúdenia zavedenej v úlohe 2.2.1.

Úloha 4.2.2 Vysvetlite, prečo výraz

$$\int_V \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} \cdot \vec{v} dV$$

prispievajúci k produkcii e_k *nepredstavuje* celkový okamžitý výkon ďalekodosahových síl na látku v objeme V .

Príklad 4.2.3 *Bernoulliho rovnica*. Nestlačiteľná kvapalina sa ustálene pohybuje v homogénnom gravitačnom poli. Vychádzajúc z rovnice (4.2.2) ukážte, že pozdĺž prúdnice platí

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} + hg = \text{konštanta}$$

Riešenie: V gravitačnom poli môžeme použiť gravitačný potenciál $\phi(\vec{r}) = -\vec{g} \cdot \vec{r} = gh$, pomocou ktorého vieme zapísať hustotu sily v tvare $\vec{f} = -\nabla\phi$. Posledný člen v (4.2.2) tým pre jednozložkovú kvapalinu nadobudne tvar

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} \cdot \vec{v} = -\rho \vec{v} \cdot \nabla \phi.$$

Porovnaním ľavej strany rovnice (4.2.2) a ľavej strany prostrednej rovnice z troch rovníc v (4.2.3) dostaneme pre nestlačiteľnú kvapalinu ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$) pri ustálenom prúde ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) identitu

$$\rho \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \rho \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

Dosadením oboch úprav do (4.2.2) nájdeme

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -\vec{v} \cdot \nabla p - \rho \vec{v} \cdot \nabla \phi \quad (4.2.9)$$

Predelením hustotou ρ a potom integrovaním pozdĺž krivky $\vec{r}(t)$, ktorá predstavuje prúdnicu parametrizovanú časom, nájdeme pre každý člen

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \nabla f(\vec{r}(t), \vec{v}(\vec{r}(t))) &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \nabla f(\vec{r}, \vec{v}(\vec{r})) \\ &= f(\vec{r}_2, \vec{v}(\vec{r}_2)) - f(\vec{r}_1, \vec{v}(\vec{r}_1)) \end{aligned}$$

a tým aj hľadajú Bernoulliho rovnicu.

Úloha 4.2.4 Ukážte, že pre stlačiteľnú kvapalinu, ktorej tlak závisí od hustoty platí Bernoulliho rovnica v tvare

$$\frac{1}{2} v^2 + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} + hg = \text{konštanta}$$

Riešenie: Postup je identický s predchádzajúcou úlohou po rovnicu (4.2.9), ktorú potom predelíme hustotou. Tentokrát musíme mať napamäti, že hustota môže byť funkciou priestorových súradníc prostredníctvom lokálneho tlaku, $\rho(\vec{r}) = \rho(p(\vec{r}))$. Preto člen s gradientom tlaku treba pri integrovaní pozdĺž prúdnicu upraviť,

$$\frac{1}{\rho(p(\vec{r}))} \nabla p(\vec{r}) = \nabla \left(\int_{p_0}^{p(\vec{r})} \frac{dp}{\rho(p)} \right).$$

4.3 Rovnica spojitosti pre vnútornú energiu

Hustota vnútornej energie látky $\rho u = e - e_k$ bude spĺňať rovnicu spojitosti

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}_u + \sigma_u, \quad (4.3.1)$$

ak budú hustota toku a produkcia vnútornej energie dané rozdielmi zodpovedajúcich hustôt tokov a produkcií: $\vec{j}_u = \vec{j}_e - \vec{j}_{e_k}$ a $\sigma_u = \sigma_e - \sigma_{e_k}$.

Produkcii vnútornej energie σ_u teda získame ako rozdiel práce vonkajších síl (4.1.7) a produkcie hustoty kinetickej energie (4.2.5), s využitím všeobecnejšieho vyjadrenia pre tenzor napätia (4.2.7)

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \sigma_e - \sigma_{e_k} \\ &= \sum_{\alpha} \vec{\rho}_{\alpha} f_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} - \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} \cdot \vec{v} + \vec{\sigma} : \nabla \vec{v} \\ &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{f}_{\alpha} \cdot (\vec{v}_{\alpha} - \vec{v}) + \vec{\sigma} : \nabla \vec{v} \\ &= \sum_{\alpha} \vec{j}_{\alpha} \cdot \vec{f}_{\alpha} + \vec{\sigma} : \nabla \vec{v}, \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

kde sme identifikovali hustotu difúzneho toku $\vec{j}_{\alpha} = \rho_{\alpha}(\vec{v}_{\alpha} - \vec{v})$ zavedenú v časti 2.5.

Podobne, hustota toku vnútornej energie je daná rozdielom

$$\begin{aligned} \vec{j}_u &= \vec{j}_e - \vec{j}_{e_k} \\ &= \vec{j}_e - \vec{v} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p \right). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Tento vzťah ale nateraz na úpravu rovnice spojitosti nepoužijeme. Užitočnejšie sa ukáže rozdelenie hustoty toku vnútornej energie na *konvektívny* a *nekonvektívny*⁴, príspevok

$$\vec{j}_u = \rho u \vec{v} + \vec{j}_{u,nc}. \quad (4.3.4)$$

Pretože hmotnostná vnútorná energia je veličina viazaná na látku, bude užitočné prepísať jej rovnicu spojitosti pomocou hydrodynamickej derivácie. Vyjadrením parciálnej derivácie podľa času pomocou hydrodynamickej derivácie nachádzame

$$\frac{d\rho u}{dt} - \vec{v} \cdot \nabla(\rho u) = -\nabla \cdot (u\rho\vec{v}) - \nabla \cdot \vec{j}_{u,nc} + \sigma_u$$

⁴Nekonvektívny tok sa niekedy nazýva aj difúznym tokom.

$$\rho \frac{du}{dt} + u \frac{d\rho}{dt} - \vec{v} \cdot \nabla(\rho u) = -\nabla \cdot (u\rho\vec{v}) - \nabla \cdot \vec{j}_{u,nc} + \sigma_u.$$

Nakoniec uvážením rovnice spojitosti pre hustotu (2.4.8) nájdeme konečný tvar

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla \cdot \vec{j}_{u,nc} + \vec{\sigma} : \nabla \vec{v} + \sum_{\alpha} \vec{j}_{\alpha} \cdot \vec{f}_{\alpha}. \quad (4.3.5)$$

Rovnica spojitosti pre hmotnostnú vnútornú energiu predstavuje základnú rovnicu opisujúcu problematiku prestupu tepla. Uvidíme, že nekonvektívna časť hustoty toku vnútornej energie je často identifikovaná s *hustotou toku tepla* \vec{j}_Q . Celkový tok tepla J_Q cez vybranú plochu S je potom daný plošným integrálom

$$J_Q = \int_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}, \quad (4.3.6)$$

analogicky tokom patriacim k hustotám tokov zavedených v podkapitole 2.2. Na výpočet $\vec{j}_{u,nc}$ bude potrebné riešiť rovnicu spojitosti pre vnútornú energiu.

V prípade prestupu tepla v tekutinách je podstatný konvektívny prenos energie. Celková hustota toku energie bude podľa rovnice (4.3.3) daná vzťahom

$$\vec{j}_e = \vec{v} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho u \right) + \vec{j}_{u,nc} = \vec{v} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho h \right) + \vec{j}_{u,nc}, \quad (4.3.7)$$

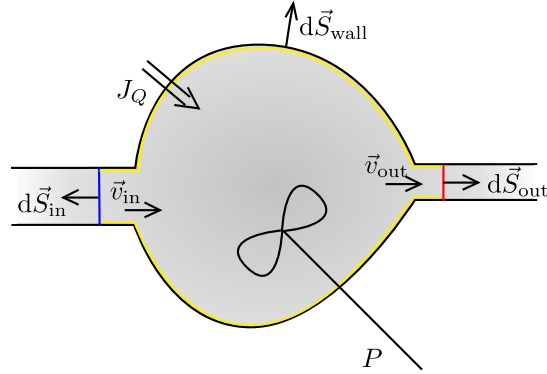
kde $h = u + p/\rho$ je entalpia látky na jednotku hmotnosti. Nekonvektívna časť hustoty toku vnútornej energie je v tomto výraze často zanedbateľná a kľúčovým sa stáva určenie rýchlosti prúdenia \vec{v} . Tok energie sprostredkovaný tokom tekutiny cez vybraný prierez daný plochou S bude opäť určený plošným integrálom

$$J_e = \int_S \vec{j}_e \cdot d\vec{S}. \quad (4.3.8)$$

Príklad 4.3.1 *Využitie entalpie pri prietokových reaktoroch, turbínach a generátoroch.* Použite rovnicu spojitosti pre celkovú energiu (4.1.7) a tvar hustoty toku celkovej energie (4.3.7) na látku prechádzajúcu cez chemický reaktor alebo parnú turbínu pracujúcu v ustálenom režime a ukážte, že musí platiť, že rozdiel výrazu

$$\left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \dot{m}$$

na výstupe a na vstupe, kde h je hmotnostná entalpia a \dot{m} je hmotnosť látky vystupujúcej alebo vstupujúcej do reaktora za jednotku času, sa musí rovnať celkovej energii (tepla, práce) dodanej látke v reaktore.



Obr. 4.3.1: Pri energetickej bilancii v prietokovom reaktore rozdelíme jeho hraničnú plochu na prierez vstupu, výstupu a stenu reaktora.

Riešenie: Pri ustálenom stave je $\frac{\partial e}{\partial t} = 0$. Rovnicu (4.1.7) integrujeme cez celý objem reaktora. Výraz

$$P = \int_V \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{f}_{\alpha} dV$$

predstavuje celkový výkon, ktorý je konaný na látke v reaktore. V prípade turbíny je to záporné číslo a v absolútnej hodnote predstavuje výkon turbíny.

Člen s $\nabla \cdot \vec{j}_e$ zmeníme Gaussovou vetou na integrál cez celý povrch reaktora. Tento si rozdelíme na prierez vstupného potrubia S_{in} , výstupného potrubia S_{out} a steny reaktora S_{wall} . Pokiaľ zanedbáme tok tepla v toku vstupujúcej a vystupujúcej látky, čo predstavuje predpoklad, že teplota sa pozdĺž prítoku a výtoku látky nemení, rozdelí sa celý plošný integrál na tri príspevky

$$\int \vec{j}_e \cdot d\vec{S} = \int_{S_{in}} \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{out}} \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{wall}} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$$

Posledný výraz predstavuje celkový tepelný tok von z reaktora J_Q . Pri prvých dvoch si uvedomíme, že

$$\dot{m} = - \int_{S_{in}} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}_{in} = \int_{S_{out}} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}_{out}$$

a preto je vhodné zaviesť pre vstupné veličiny priemernú kvadratickú rýchlosť

$$\frac{1}{2} v_{av,in}^2 = \frac{1}{\dot{m}} \int_{S_{in}} \frac{1}{2} v^2 \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

a hmotnostnú entalpiu

$$h_{\text{av},\text{in}} = \frac{1}{\dot{m}} \int_{S_{\text{in}}} h \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

a podobne pre výstupné veličiny $v_{\text{av},\text{out}}$ a $h_{\text{av},\text{out}}$. Pomocou týchto označení nachádzame bilančnú rovnicu

$$\left[\left(\frac{1}{2} v_{\text{av},\text{out}}^2 + h_{\text{av},\text{out}} \right) - \left(\frac{1}{2} v_{\text{av},\text{in}}^2 + h_{\text{av},\text{in}} \right) \right] \dot{m} = P - J_Q \quad (4.3.9)$$

Uvedomme si, že napriek podobnosti s Bernoulliho rovnicou, táto rovnica je na jednej strane všeobecnejšia, lebo platí aj pre viskózne prúdenie a konanie rôznej aj nevratnej práce. Na strane druhej, platí len pre priemerné hodnoty a nie pozdĺž každej prúdnice.

Úloha 4.3.2 Z pohľadu riešenia príkladu 4.3.1 sú gravitačné sily súčasťou výkonu P . Ako by vyzeral výsledný vzťah pre bilanciú, ak by sme gravitačné sily vyjadrili pomocou ich potenciálu a jeho príspevok zahrnuli do hustoty toku celkovej energie?

Kapitola 5

Nerovnovážna termodynamika

Cieľom nerovnovážnej termodynamiky je formulácia uzavretej sústavy diferenciálnych rovníc opisujúcich makroskopickú fyzikálnu sústavu v nerovnovážnom stave. Uzavretá sústava rovníc znamená, že počet neznámych funkcií je rovnaký ako počet rovníc, resp. že ich riešenie je jednoznačné. Pohybové rovnice nájdené v predchádzajúcej kapitole také neboli, napríklad závislosť hustoty toku vnútornej energie, tenzora napätia či hustoty difúznho toku od ostaných veličín nebol špecifikovaný. Uvidíme, že tieto vzťahy nachádza nerovnovážna termodynamika na základe druhého zákona termodynamického.

Základná kniha nerovnovážnej termodynamiky je monografia de Groota a Mazura [13]. Štefan Bárta (1931 až 2005), ktorý celý život pôsobil na Katedre fyziky FEI STU, napísal skriptá Nerovnovážna termodynamika [14], ktoré určite stoja za prelistovanie.

5.1 Lokálny tvar termodynamických zákonov

V kapitole 1 venovanej termodynamike sme sa zaoberali sústavou, ktorá bola navonok v pokoji. Pri používaní hmotnostnej vnútornej energie budeme za termodynamickú sústavu považovať malú časť látky, ktorú sme v časti 2.4 zaviedli pomocou pohyblivého objemu $\Delta V(t)$. Vzhľadom na objem $\Delta V(t)$ je táto malá časť látky v pokoji. Hoci látka ako celok je v nerovnováhe, budeme predpokladať, že každá jej dostatočne malá časť sa nachádza veľmi blízko svojho *lokálneho rovnovážneho stavu*.

Pretože hmotnosť látky v pohyblivom objeme $\Delta V(t)$ je nemenná, predelením zmeny jej vnútornej energie 1.4.9 s jej hmotnosťou nájdeme lokálny výraz pre malú zmenu vnútornej energie uvažovanej látky na jednotku hmot-

nosti – hmotnostnú vnútornú energiu, nazývaný aj *Gibbsova rovnica*¹

$$du = Tds - pd\mathcal{V} + \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} dn_{\alpha}, \quad (5.1.1)$$

kde s je entropia na jednotku hmotnosti látky, $\mathcal{V} = 1/\rho$ je objem na jednotku hmotnosti látky a n_{α} je hmotnostné látkové množstvo zložky α – *molarita*. V rámci všeobecnej formulácie rovníc nerovnovážnej termodynamiky je miesto molality vhodnejšie používať hmotnostný zlomok zložky (2.5.9)

$$c_{\alpha} = \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} = \frac{m_{\alpha}}{m} = n_{\alpha} M_{m,\alpha}, \quad (5.1.2)$$

kde $M_{m,\alpha}$ je molová hmotnosť zložky, konštanta charakterizujúca danú zložku. Ak predefinujeme chemický potenciál v zmysle $\tilde{\mu}_{\alpha} = \mu_{\alpha}/M_{m,\alpha}$, môžeme písať príspevok k zmene hmotnostnej vnútornej energie v tvare $du|_{s,\mathcal{V}} = \sum_{\alpha} \tilde{\mu}_{\alpha} dc_{\alpha}$.

V dôsledku pôsobenia okolitej látky na vybranú časť látky sa bude lokálny rovnovážny stav meniť. Zmenu hmotnostnej vnútornej energie za krátky interval času dt možno vyjadriť pomocou rovnice (5.1.1),

$$\frac{du}{dt} = T \frac{ds}{dt} - p \frac{d\mathcal{V}}{dt} + \sum_{\alpha} \tilde{\mu}_{\alpha} \frac{dc_{\alpha}}{dt} \quad (5.1.3)$$

Z hľadiska zavedenia termodynamického opisu látky v pohyblivom objeme je jasné, že uvedená derivácia predstavuje hydrodynamickú deriváciu, t. j. zmenu pozdĺž prúdnic. Pomocou tejto identifikácie prepojíme termodynamiku látky s rovnicou spojitosti pre vnútornú energiu (4.3.5).

Vďaka predpokladu o lokálnej rovnováhe je závislosť hmotnostnej vnútornej energie od priestorových súradníc a času $u(\vec{r},t)$ daná prostredníctvom lokálnych stavových veličín. Z kapitoly o termodynamike vieme, že v prípade látky s jednoou zložkou si môžeme vybrať dve nezávislé stavové veličiny pre jednoznačný opis stavu. Pre viaczložkovú látku potrebujeme ďalšie veličiny, charakterizujúce jej zloženie. Vyberieme si teplotu T , hustotu ρ a hmotnostné zlomky c_{α} , $\alpha = 1, \dots, M-1$,

$$u(\vec{r},t) = u(T(\vec{r},t), \rho(\vec{r},t), c_1(\vec{r},t), \dots, c_{M-1}(\vec{r},t)). \quad (5.1.4)$$

kde M je počet zložiek látky. Hmotnostný zlomok poslednej M -tej zložky už nie je nezávislou premennou, pretože z definície (2.5.9) vyplýva, že $\sum_{\alpha=1}^M c_{\alpha} = 1$. Podobné vyjadrenie ako je rovnica (5.1.4) možno napísať aj pre ostatné závislé termodynamické veličiny, napríklad s , \mathcal{V} alebo μ .

¹Pre jednoduchosť uvádzame len príspevok od objemovej rovnovážnej práce $dW = -pdV$.

Úloha 5.1.1 Nájdite vyjadrenie pre molalitu zložky α (látkové množstvo zložky nachádzajúce sa v jednotke hmotnosti látky) pomocou jej parciálnej hustoty hmotnosti ρ_α , molovej hmotnosti zložky $M_{m,\alpha}$ a celkovej hustoty látky ρ . Ukážte pomocou tohto vzťahu, že $\sum_\alpha M_{m,\alpha} n_\alpha = 1$, a preto nemôžeme uvažovať molality všetkých zložiek ako nezávislé stavové premenné.

Úloha 5.1.2 Nájdite vyjadrenie pre objem jednotkovej hmotnosti látky \mathcal{V} pomocou parciálnych hustoty hmotnosti všetkých zložiek. Na základe tohto vzťahu uvážte, či môžeme vziať všetky parciálne hustoty a objem jednotkovej hmotnosti látky za nezávislé stavové premenné.

5.2 Kinetické koeficienty pre tuhé látky

V tejto podkapitole demonštrujeme prístup nerovnovážnej termodynamiky k opisu prestupu tepla a prenosu elektrického náboja v tuhých látkach. Obmedzenie sa na tuhé látky zjednoduší opis oproti deformovateľným/stlačiteľným látkam, no zároveň zahrnutie transportu náboja dá do súvisu aplikačne zaujímavý Seebeckov jav s dobre známym Ohmovým zákonom.

Ak zanedbáme zmeny objemu tuhej látky, tak vlastne predpokladáme, že hustota hmotnosti je nemenná, $\rho = \text{konšt.}$ V tuhej látke budeme uvažovať možný presun elektrónov s nábojom q , hustotu toku elektrického prúdu označíme \vec{j}_q , hustotu náboja ρ_q , hmotnostné látkové množstvo elektrónov $n = n(\mathbf{r}, t)$ (molalita $[n] = \text{mol} \cdot \text{kg}^{-1}$). Uvažujeme, že látka môže byť elektrickým vodičom. V látke sa môže nachádzať elektrické pole $\vec{E} = -\nabla\phi$. Polarizáciu látky neuvažujeme. $z = -e/m_e$ je špecifický náboj elektrónu. Parciálna hustota elektrónov je $\rho_e = \rho_q/z$, difúzna hustota toku hmotnosti elektrónov $\vec{j}_e = \rho_e(\vec{v}_e - \vec{v}) = \vec{j}_q/z$.

Vnútoraná energia na jednotku objemu bude spĺňať bilančnú rovnicu

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}_{u,nc} + \vec{j}_q \cdot \vec{E}, \quad (5.2.1)$$

kde *produkciu vnútornej energie* predstavuje hustota Joulových strát. Tento vzťah je špeciálnym prípadom rovnice spojitosti pre hmotnostnú vnútornú energiu stlačiteľnej viaczložkovej látky, získaný v časti 4.3.

Objemová hustota elektrického náboja ($\rho_q = z\rho_e$, $\vec{j}_q = z\vec{j}_e$) spĺňa rovnicu spojitosti v tvare

$$\frac{\partial\rho_q}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}_q. \quad (5.2.2)$$

Lokálny tvar termodynamických zákonov vedie na Gibbsov vzťah

$$du = Tds + \tilde{\mu}_e dc_e \quad (5.2.3)$$

kde $\tilde{\mu}_e$ je chemický potenciál elektrónov v látke a c_e hmotnostný zlomok elektrónov v látke. Pre látku, ktorá nie je v pohybe, predstavuje Gibbsov vzťah zmenu lokálnych veličín, t. j. ich parciálne časové derivácie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = T \frac{\partial s}{\partial t} + \tilde{\mu}_e \frac{\partial c_e}{\partial t}. \quad (5.2.4)$$

Aj v tomto prípade ich ale musíme chápať ako zložené derivácie vyjadrené prostredníctvom zvolených lokálnych stavových veličín, t. j. napr.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial c_e} \frac{\partial c_e}{\partial t}.$$

Kombináciou rovníc (5.2.1) a (5.2.4) nájdeme rovnicu pre hmotnostnú entropiu látky

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{1}{T} \nabla \cdot \vec{j}_{u,nc} + \frac{1}{T} \vec{j}_q \cdot \vec{E} - \frac{\tilde{\mu}_e}{T} \rho \frac{\partial c_e}{\partial t}, \quad (5.2.5)$$

ktorú upravíme do tvaru rovnice spojitosti pomocou vzťahu 2.5.11 (Príklad 5.2.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} &= -\nabla \cdot \left(\frac{\vec{j}_{u,nc} - (\tilde{\mu}_e/z)\vec{j}_q}{T} \right) \\ &\quad - \frac{\dot{j}_{u,nc} - (\tilde{\mu}_e/z)\dot{j}_q}{T^2} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \vec{j}_q \cdot (\vec{E} - \nabla(\tilde{\mu}_e/z)), \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Porovnaním poslednej rovnice so všeobecnou matematickou formou rovnice spojitosti identifikujeme hustotu toku entropie

$$\vec{j}_s = \frac{\vec{j}_{u,nc} - (\tilde{\mu}_e/z)\vec{j}_q}{T} \quad (5.2.7)$$

a produkciu entropie

$$\sigma_s = -\frac{1}{T} \vec{j}_s \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \vec{j}_q \cdot (\vec{E} - \nabla(\tilde{\mu}_e/z)) \quad (5.2.8)$$

Pomocou hustoty toku entropie definujeme *hustotu toku tepla* \vec{j}_Q

$$\vec{j}_Q = T \vec{j}_s. \quad (5.2.9)$$

Táto definícia predstavuje určitú paralelu vzťahu medzi rovnovážne prijatým teplom sústavou a nárastom jej entropie $\delta Q_R = TdS$, aj keď každý z týchto dvoch vzťahov má nie len prekrývajúce sa ale aj disjunktné oblasti platnosti.

Druhý zákon termodynamický tvrdí, že spontánne prebehnú len tie procesy, pri ktorých entropia sústavy narastie. Takúto formuláciu možno zmysluplne použiť len pre situácie, keď počiatočný aj koncový stav sústavy je rovnovážnym stavom. V rámci nerovnovážnej termodynamiky dokážeme opisovať aj sústavy, ktoré sú z celkového hľadiska nerovnovážne. Lokálnym princípom nevratnosti deja sa stáva *princíp kladne definitnej produkcie entropie* [13]

$$\sigma_s \geq 0. \quad (5.2.10)$$

V nasledujúcich príkladoch ukážeme, ako tento princíp vedie na vzťahy pre hustoty tokov vyskytujúce sa v rovniciach spojitosti pre hybnosť, hmotnostnú vnútornú energiu a entropiu. Tieto postupy pre opis nehomogénnych nerovnovážnych procesov predstavujú rozšírenie vzťahov (1.5.7), (1.5.10) a (1.5.12), ktoré sme získali z princípu nárastu entropie (1.5.3) v kapitole 1.5.

Elektrická konduktivita. Ak predpokladáme, že v telese nie sú gradienty teploty a chemický potenciál je konštantný, potom produkcia entropie (5.2.8) sa zjednoduší na výraz

$$\sigma_s = \frac{1}{T} \vec{j}_q \cdot \vec{E} = \frac{1}{T} (j_{q,x} E_x + j_{q,y} E_y + j_{q,z} E_z). \quad (5.2.11)$$

V stave termodynamickej rovnováhy sú všetky zložky prúdovej hustoty ako aj intenzity elektrického poľa vo vodiči nulové. Pri aplikovaní malého nenulového poľa, budú aj zložky prúdovej hustoty malé a nenulové. V lineárnom priblížení budú teda všetky zložky prúdovej hustoty úmerné zložkám intenzity elektrického poľa, čo môžeme napísať v tvare

$$j_{q,i} = \sum_{j=x}^z \gamma_{ij} E_j \quad (5.2.12)$$

kde γ_{ij} je matica alebo tenzor elektrickej konduktivity. Po dosadení posledného vzťahu do produkcie entropie nájdeme

$$\sigma_s = \frac{1}{T} \sum_{i,j} \gamma_{ij} E_i E_j \quad (5.2.13)$$

Nakolko produkcia musí byť nulová alebo kladná pre ľubovoľné elektrické pole, musí byť matica γ_{ij} kladne definitná (pozri príklad 5.2.5). Zároveň z výrazu je zjavné, že len symetrická časť matice γ_{ij} vedie k nenulovej produkcii entropie, a preto nerovnovážna hustota toku elektrického prúdu bude daná len symetrickým tenzorom konduktivity, $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$.

Curieho princíp. Výrazná redukcia počtu zložiek tenzora konduktivity sa dosiahne pomocou *Curieho princípu*. Curieho princíp vychádza z pozorovania, že vlastnosti izotropných látok nezávisia od orientácie súradníc, v ktorých jej fyzikálne procesy opisujeme. Jeho dôsledkom pre izotropnú látku v tomto prípade je redukcia symetrickej matice koeficientov konduktivity na jediný skalárny koeficient násobiaci jednotkovú maticu. Lineárny vzťah medzi hustotou elektrického prúdu a intenzitou elektrického poľa (5.2.12) sa teda pre izotropnú látku redukuje na známy lokálny Ohmov zákon,

$$j_{q,i} = \sum_j \gamma \delta_{ij} E_j = \gamma E_i \text{ alebo vektorovo } \vec{j}_q = \gamma \vec{E}. \quad (5.2.14)$$

K odvodeniu takéhoto tvrdenia môžeme prísť touto úvahou: Nech v určitom bode látky je vektor intenzity elektrického poľa $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$, pričom všetky tri zložky môžu byť nenulové. Ak vyberieme inú sústavu súradníc danú jednotkovými vektormi $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ takú, že \vec{i}' bude v smere \vec{E} , potom v nej bude platiť $E_{y'} = E_{z'} = 0$. Produkcia entropie bude mať jediný člen $j_{q,x'} E_{x'}/T$ a látka bude charakterizovaná jedinou konduktivitou $j_{q,x'} = \gamma E_{x'}$. Pre izotropnú látku tento výsledok nemôže závisieť od voľby súradníc, a preto vo všeobecnosti musí platiť $\vec{j}_q = \gamma \vec{E}$, t. j. tenzor konduktivity sa zredukuje na jediné číslo.

Konduktivita môže závisieť od všetkých lokálne určených nezávislých stavových veličín, ktoré v našom prípade sú teplota a chemický potenciál. V rámci lineárneho priblíženia už ale nezávisí od intezity elektrického poľa alebo hustoty toku prúdu, t. j. od nerovnovážnych veličín. Typické hodnoty konduktivity látok sú uvedené v tabuľke 5.1.

Kontaktný potenciál. Dva odlišné kovy majú pri tej istej teplote vo všeobecnosti odlišný chemický potenciál elektrónov. Ak si tieto označíme ako μ_a a μ_b , potom pri priložení týchto kovov k sebe sa medzi nimi objaví rozdiel elektrostatického potenciálu, ktorý nazývame aj kontaktný potenciál. V taktomto prípade má produkcia entropie (5.2.8) tvar ²

$$\sigma_s = \frac{1}{T} \vec{j}_q \cdot \left(\vec{E} - \nabla \frac{\mu}{F} \right). \quad (5.2.15)$$

Použitím pozitivity produkcie entropie a Curieho princípu nachádzame lineárny vzťah,

$$\vec{j}_q = \gamma \left(\vec{E} - \nabla \frac{\mu}{F} \right). \quad (5.2.16)$$

² $F = N_A(-e)$ je Faradayov náboj, t. j. náboj jedného molu elektrónov. Zjavne platí $\tilde{\mu}_e/z = \mu/F$, kde μ je chemický potenciál na jeden mol elektrónov v látke.

	oceľ	sklo	voda	vzduch	
γ (MS/m)	5	$\sim 10^{-19}$	$\sim 10^{-9}$	$\sim 10^{-18}$	
λ (W/[m. $^{\circ}$ C])	50	~ 1	0,5	0,01	
	Cu	Al	Ni	Bi	Se
γ (MS/m)	56	34	14,3	0,8	$\sim 10^{-8} / 10^{-9}$
λ (W/[m. $^{\circ}$ C])	400	220	100	8	0,5/ 2
\mathcal{S} (μ V/K)	6,5	3,5	-15	-72	900

Tabuľka 5.1: Typické hodnoty troch kinetických koeficientov pre niektoré látky. Koeficient tepelnej vodivosti a konduktivity vystupujú vo vzťahu medzi zodpovedajúcimi silami a tokmi, a preto sú vždy kladné. Seebeckov koeficient predstavuje krížový jav, a preto môže byť aj záporný. Uvedené hodnoty zodpovedajú látkam pri teplote $T \approx 300$ K a tlaku $p \approx 10^5$ Pa.

V rovnovážnom stave musí byť prúdová hustota nulová, a teda na rozhraní dvoch kovov s odlišným chemickým potenciálom sa objavuje indukované elektrické pole

$$\vec{E} = \nabla \frac{\mu}{F} \quad (5.2.17)$$

Toto vzniká tak, že malé množstvo elektrónov prejde z jedného kovu do druhého, čo vedie k vzniku dipólového rozloženia náboja na ich rozhraní. Integrovaním intenzity pozdĺž krátkej vzdialenosti z jedného kovu do druhého nájdeme kontaktný potenciál kovov

$$\Delta V = - \int_a^b \vec{E} \cdot dr = \phi_b - \phi_a = (\mu_a - \mu_b)/F. \quad (5.2.18)$$

Rozdiel chemických potenciálov dvoch rôznych kovov (uvažovaný na jeden elektrón) je zhodný s rozdielom ich výstupnej práce $W_a - W_b$ predelenej nábojom elektrónu. Výstupná práca kovov je okolo 4 eV s variabilitou okolo 10 % alebo menej v závislosti od jeho atomárneho zloženia. Kontaktný potenciál medzi dvoma kovmi je preto typicky nanajvyšš 0,4 V.

Koeficient tepelnej vodivosti. Uvažujme izotropnú látku, bez elektrického poľa a elektrického prúdu, s konštantným chemickým potenciálom v celom svojom objeme. Produkcia entropie (5.2.8) má v tomto prípade tvar

$$\sigma_s = -\vec{j}_s \cdot \frac{1}{T} \nabla T = -\vec{j}_Q \cdot \frac{1}{T^2} \nabla T. \quad (5.2.19)$$

Podobne ako v prípade elektrickej konduktivity usúdime, že zložky vektora hustoty toku entropie musia byť lineárne úmerné zložkám gradientu teploty,

pričom všeobecný tenzor tejto úmernosti sa pre izotropne látky zredukuje na diagonálny v dôsledku Curieho princípu,

$$\vec{j}_s = -L \frac{1}{T} \nabla T \quad (5.2.20)$$

kde $L \geq 0$ je kladný koeficient, závisiaci už len od lokálnych rovnovážnych stavových premenných. Pretože hustota toku tepla je priamo daná hustotou toku entropie (5.2.9) nachádzame

$$\vec{j}_Q = -\lambda \nabla T, \quad (5.2.21)$$

kde $\lambda \equiv L$ sa nazýva *koeficient tepelnej vodivosti* a uvedený vzťah je známy ako fenomenologický *Fourierov zákon*.

Interpretácia tohto vzťahu je takáto – vektor hustoty toku tepla bude orientovaný v smere najprudšieho poklesu teploty a bude úmerný veľkosti tohto poklesu na jednotku vzdialenosti. Samotný koeficient tepelnej vodivosti môže závisieť od všetkých lokálnych hodnôt stavových veličín, napríklad od teploty. Typické hodnoty koeficientu tepelnej vodivosti látok sú uvedené v tabuľke 5.1.

Fourierov zákon predstavuje lokálny vzťah zodpovedajúci rovnici (1.5.7) na strane 28, ktorú sme získali tiež z podmienky nárastu entropie, no bez použitia opisu látky ako spojitého prostredia.

Skrížené javy. Nakoniec uvažujme všeobecný prípad pre izotropnú tuhú látku. Produkcia entropie (5.2.8) obsahuje súčet skalárnych súčinov: súčin hustoty toku entropie \vec{j}_s a tzv. *zovšeobecnenej sily* $\vec{\mathcal{F}}_s = -(1/T) \nabla T$ a súčin hustoty toku prúdu \vec{j}_q a *zovšeobecnenej sily* $\vec{\mathcal{F}}_q = (1/T) (\vec{E} - \nabla(\mu/F))$, a teda ju možno napísať v tvare

$$\sigma_s = \vec{j}_s \cdot \vec{\mathcal{F}}_s + \vec{j}_q \cdot \vec{\mathcal{F}}_q \quad (5.2.22)$$

Ak je látka v rovnovážnom stave, potom sú sily aj toky nulové. Ak sa od rovnováhy trochu vzdialime pôsobením nenulových zovšeobecnených síl, potom aj toky budú v odozve na to nenulové. V lineárnom priblížení môžeme písať

$$\vec{j}_s = L_{11} \vec{\mathcal{F}}_s + L_{12} \vec{\mathcal{F}}_q \quad (5.2.23)$$

$$\vec{j}_q = L_{21} \vec{\mathcal{F}}_s + L_{22} \vec{\mathcal{F}}_q \quad (5.2.24)$$

kde sme už využili Curieho princíp a všetky lineárne koeficienty – *Onsagerove koeficienty* – sú len čísla a nie tenzory. Podobne ako to bolo pri tenzore konduktivity, aj matica Onsagerových koeficientov musí byť kladne definitná, aby bola produkcia entropie kladná alebo nulová. Onsager navyiac ukázal, že v dôsledku mikroskopickej reverzibility pohybových zákonov sú Onsagerove

koeficienty prvkami *symetrickej matice*, t. j. $L_{12} = L_{21}$, čo predstavuje ďalšie obmedzenie na materiálové parametre látky.

Na porovnanie s experimentálnymi meraniami je vhodné používať hustotu toku tepla miesto hustoty toku entropie a upraviť nájdené rovnice do tvaru, kde na ľavej strane budú vystupovať \vec{j}_Q a $\vec{E}' = \vec{E} - \nabla\mu/F$ a na pravých stranách budú ∇T a \vec{j}_q . Posledné dve veličiny totiž dokážeme ľahšie experimentálne nastaviť na nulové hodnoty. Po krátkej úprave nájdeme

$$\vec{j}_Q = - \left(L_{11} - \frac{L_{12}L_{21}}{L_{22}} \right) \nabla T + T \frac{L_{12}}{L_{22}} \vec{j}_q \quad (5.2.25)$$

$$\vec{E}' = \frac{L_{21}}{L_{22}} \nabla T + \frac{T}{L_{22}} \vec{j}_q. \quad (5.2.26)$$

Fyzikálny význam koeficientu L_{22} sme identifikovali pomocou elektrickej konduktivity

$$L_{22} = \gamma T. \quad (5.2.27)$$

Na druhej strane, koeficient tepelnej vodivosti je pre všeobecný prípad daný vzťahom

$$\lambda = L_{11} - \frac{L_{12}L_{21}}{L_{22}}. \quad (5.2.28)$$

Fyzikálny význam koeficientu L_{12} nájdeme pomocou Peltierovho javu.

Peltierov jav. Peltier objavil, že ak do série spojíme dva vodiče z rôzneho materiálu majúce zhodnú teplotu, potom ak nimi prechádza elektrický prúd I , tak sa na ich vzájomnom kontakte uvoľňuje alebo pohlcuje teplo úmerné veľkosti elektrického prúdu. Takýto jav kvantifikujeme Peltierovým koeficientom Π pre daný materiál – uvoľnené teplo v kontakte dvoch vodičov z materiálu a a b je dané vzťahom,

$$J_Q = (\Pi_a - \Pi_b)I, \quad (5.2.29)$$

kde orientácia plochy na výpočet prúdu je z materiálu a do materiálu b .

Peltierov jav je dôsledkom rovníc 5.2.23 a 5.2.24. Pri nulovom gradiente teploty z nich vyplýva vzťah medzi hustotami oboch tokov

$$\vec{j}_s = \frac{L_{12}}{L_{22}} \vec{j}_q.$$

Nakoľko podľa (5.2.9) $j_Q = Tj_s$, nachádzame identifikáciu

$$\Pi = T \frac{L_{12}}{L_{22}} \quad (5.2.30)$$

Seebeckov koeficient. Seebeck pozoroval, že ak je vo vodiči nulový elektrický prúd pri nenulovom gradiente teploty, potom na dosiahnutie tejto rovnováhy sa vo vodiči indukuje elektromotorické napätie \mathcal{E} medzi koncami vodiča, úmerné rozdielu teploty na koncoch vodiča. Táto úmernosť je charakterizovaná Seebeckovým koeficientom \mathcal{S} ,

$$\mathcal{E} = -\mathcal{S}\Delta T \quad (5.2.31)$$

Z podmienky nulovej hustoty elektrického prúdu z rovnice 5.2.24 nájdeme

$$0 = -L_{21} \frac{\nabla T}{T} + L_{22} \frac{\vec{E} - \nabla(\mu/F)}{T} \quad (5.2.32)$$

Intenzitu elektrického poľa vyjadríme pomocou elektrostatického potenciálu $\vec{E} = -\nabla\phi$,

$$-\nabla(\phi + \mu/F) = \frac{L_{21}}{L_{22}} \nabla T \quad (5.2.33)$$

Ak integrujeme po krivke medzi koncami vzorky³ nájdeme

$$\mathcal{E} = -\frac{L_{21}}{L_{22}} \Delta T \Rightarrow \mathcal{S} = \frac{L_{21}}{L_{22}} \quad (5.2.34)$$

Z Onsagerovho vzťahu $L_{12} = L_{21}$ nachádzame vzťah medzi Seebeckovým a Peltierovým koeficientom

$$\Pi = T\mathcal{S}, \quad (5.2.35)$$

a teda Π a \mathcal{S} nepredstavujú dve nezávislé materiálové charakteristiky. Experimentálne overenie tohto vzťahu je často uvádzané ako experimentálna demonštrácia všeobenej symetrie matice Onsagerových koeficientov.

Seebeckov jav sa používa na presné lokálne meranie teploty pomocou termočlánkov z dvoch rôznych kovov, Peltierov jav je využívaný ako zdroj napätia alebo aktívne chladenie pre nízko výkonové aplikácie.

Príklad 5.2.3 Spravte jednotlivé kroky úprav z rovnice (5.2.5) do tvaru rovnice spojitosti pre entropiu (5.2.6).

Riešenie:

³Tu predpokladáme, že Seebeckov koeficient $\mathcal{S} = L_{21}/L_{22}$ je konštantný. Ak je Thomsonov koeficient \mathcal{K} z úlohy 5.2.7 nenulový, nie je tento predpoklad splnený. V takomto prípade je Seebeckov jav charakterizovaný lokálnym vzťahom $-\nabla(\phi + \mu/F) = \mathcal{S}\nabla T$.

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial s}{\partial t} &= -\frac{1}{T} \nabla \cdot \vec{j}_u + \frac{1}{T} \vec{j}_q \cdot \vec{E} + \frac{\mu}{FT} \nabla \cdot \vec{j}_q \\
\rho \frac{\partial s}{\partial t} &= -\nabla \cdot \left(\frac{\vec{j}_u}{T} \right) - \frac{j_u}{T^2} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \vec{j}_q \cdot \vec{E} + \frac{\mu}{FT} \nabla \cdot \vec{j}_q \\
\rho \frac{\partial s}{\partial t} &= -\nabla \cdot \left(\frac{\vec{j}_u}{T} - \frac{\mu}{FT} \vec{j}_q \right) - \frac{j_u}{T^2} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \vec{j}_q \cdot \vec{E} - \nabla \left(\frac{\mu}{FT} \right) \cdot \vec{j}_q \\
\rho \frac{\partial s}{\partial t} &= -\nabla \cdot \left(\frac{\vec{j}_u - (\mu/F) \vec{j}_q}{T} \right) - \frac{j_u}{T^2} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \vec{j}_q \cdot \vec{E} \\
&\quad + \frac{\mu/F}{T^2} \nabla T \cdot \vec{j}_q - \frac{1}{T} \nabla(\mu/F) \cdot \vec{j}_q
\end{aligned}$$

Príklad 5.2.4 Ukážeme si, ako k redukcii zložiek tenzora pomocou Curieho princípu prichádza. Na zložkách vektorov fyzikálnych veličín sa otočenie súradnicovej sústavy prejaví pôsobením rotačnej matice, napr.

$$E_i = \sum_j R_{ik} E'_k \quad (5.2.36)$$

Na výpočet produkcie entropie v pootočenej sústave to vedie na vyjadrenie

$$\sigma_s = \frac{1}{T} \sum_{ijkl} \gamma_{ij} R_{ik} R_{jl} E'_k E'_l = \frac{1}{T} \sum_{ijkl} R_{ki}^T \gamma_{ij} R_{jl} E'_k E'_l \quad (5.2.37)$$

Nakoľko tento výraz nemá závisieť od natočenia súradníc, t. j. voľby rotačnej matice, musí platiť

$$\sum_{ij} R_{ki}^T \gamma_{ij} R_{jl} = \gamma_{kl} \text{ t. j. } \sum_k \gamma_{ik} R_{kj} = \sum_k R_{ik} \gamma_{kj} \quad (5.2.38)$$

Pretože jediná matica, ktorá komutuje s ľubovoľnou rotačnou maticou, je jednotková matica násobená nanejvýš číslom, musí mať tenzor konduktivity v izotropnej látke tvar,

$$\gamma_{ij} = \gamma \delta_{ij}. \quad (5.2.39)$$

Takáto matica je kladne definitná, ak $\gamma \geq 0$.

Príklad 5.2.5

(1) Ukážte, že výraz

$$\sigma = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathcal{F}_i L_{ij} \mathcal{F}_j$$

bude kladne definitný pre ľubovoľné \mathcal{F}_1 a \mathcal{F}_2 , ak koeficienty symetrickej matice L_{ij} spĺňajú tieto podmienky

$$L_{11} \geq 0, L_{22} \geq 0 \text{ a } L_{12}^2 < L_{11}L_{22}$$

(2) Použite výsledok na nájdenie horného a dolného ohraničenia hodnoty Seebeckovho koeficienta.

Riešenie: (1) Ak rozpíšeme sumu nájdeme

$$L_{11}\mathcal{F}_1^2 + L_{22}\mathcal{F}_2^2 + (L_{12} + L_{21})\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 \geq 0$$

Ak sa na tento výraz pozrieme ako na kvadratickú nerovnicu pre neznámu \mathcal{F}_1 , podmienka, aby výraz nezmenil znamienko, je ekvivalentný tomu, aby kvadratická rovnice mala najvyšš jeden reálny koreň t. j.

$$\begin{aligned} (L_{12} + L_{21})^2\mathcal{F}_2^2 - 4L_{11}L_{22}\mathcal{F}_2^2 &\leq 0 \\ L_{12}^2 + L_{21}^2 + 2L_{12}L_{21} - 4L_{11}L_{22} &\leq 0 \\ L_{12}^2 &\leq L_{11}L_{22} \\ \pm L_{12} &\leq \sqrt{L_{11}L_{22}} \end{aligned}$$

alebo

$$-\sqrt{L_{11}L_{22}} \leq L_{12} \leq +\sqrt{L_{11}L_{22}}.$$

(2) V texte sme našli

$$\begin{aligned} L_{11} &= \lambda \\ L_{22} &= \gamma T \\ L_{12} &= \mathcal{S}L_{22} = \mathcal{S}\gamma T \end{aligned} \tag{5.2.40}$$

Preto nachádzame nerovnosti

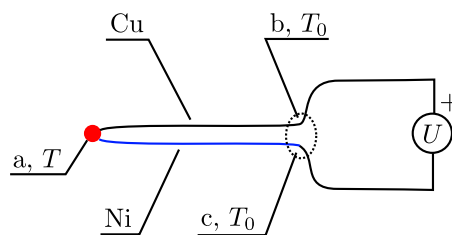
$$-\sqrt{\lambda\gamma T} \leq \mathcal{S}\gamma T \leq +\sqrt{\lambda\gamma T}.$$

t. j.

$$-S_{\max} \leq \mathcal{S} \leq +S_{\max}, \quad S_{\max} = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma T}} = \sqrt{\mathcal{L}}$$

kde \mathcal{L} je *Lorenzovo číslo* a pre všetky bežné kovy nadobúda približne rovnakú hodnotu

$$\mathcal{L} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 \approx 2,44 \times 10^{-8} \text{ W } \Omega \text{ K}^{-2}$$



Obr. 5.2.1: Seebeckov jav sa využíva na meranie teploty pomocou termočlánku. Pre dva kovy s rôznym Seebeckovým koeficientom bude napätie na voltmetri úmerné rozdielu teploty T a referenčnej teploty T_0 .

Veličina

$$zT = \frac{\gamma \mathcal{S}^2 T}{\lambda} = \left(\frac{\mathcal{S}}{\mathcal{S}_{\max}} \right)^2$$

sa u odborníkov na termoelektrické materiály volá *figure of merit* a predstavuje kvantifikátor, nakoľko je daný termoelektrický materiál efektívny pre konverziu tepla na elektrickú energiu. Z analýzy vidíme, že pre $zT = 1$ sa Seebeckov koeficient rovná jeho maximálne prípustnej hodnote. V tomto prípade je produkcia entropie nulová

$$\sigma = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \mathcal{F}_i L_{ij} \mathcal{F}_j = 0.$$

Príklad 5.2.6

Termočlánok sa skladá z dvoch rôznych vodičov – niklového a medeného (Obr. 5.2.1). Predpokladajte, že $T - T_0 = 1^\circ\text{C}$. Určte veľkosť aj polaritu napätia na voltmetri. Polarita vstupov voltmetra je naznačená na obrázku symbolom +. Pri riešení zanedbajte rozdiely chemického potenciálu v rôznych kovoch. Až celkom na koniec považujte, ako by sa výsledok zmenil uvážením rozdielov v chemickom potenciáli.

Riešenie: Hustota elektrického prúdu je podľa rovnice (5.2.24) a vzťahov pre konduktanciu (5.2.27) a pre Seebeckov koeficient (5.2.34) daná vzťahom

$$\vec{j}_q = \gamma(\vec{E} - \mathcal{S}\nabla T).$$

Nakoľko pri termočlánku je prúdová hustota nulová, vo vodičoch platí

$$0 = \vec{E} - \mathcal{S}\nabla T.$$

Elektrické pole je statické, a preto musí preň platiť $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$. Orientáciu tejto krivky zvolíme tak, aby $U = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{r}$ bolo kladné číslo, ak intenzita elektrického poľa vo voltmetri je orientovaná od jeho + konektora k – konektoru. Orientáciu krivky teda vyberieme takú, aby cez voltmeter smerovala zhora dole a na úseku vodiča z niklu z prava do ľava. Rozdelením krivky na úseky v rôznych vodičoch nájdeme

$$0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{r} + U$$

t. j.

$$U = - \int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

Použitím vzťahu medzi \vec{E} a ∇T platnom vo vodičoch nájdeme

$$\begin{aligned} U &= - \int_c^a \mathcal{S}_{\text{Ni}} \nabla T \cdot d\vec{r} - \int_a^b \mathcal{S}_{\text{Cu}} \nabla T \cdot d\vec{r} \\ &= - \mathcal{S}_{\text{Ni}} \int_c^a \nabla T \cdot d\vec{r} - \mathcal{S}_{\text{Cu}} \int_a^b \nabla T \cdot d\vec{r} \\ &= - \mathcal{S}_{\text{Ni}}(T_a - T_c) - \mathcal{S}_{\text{Cu}}(T_b - T_a) = (\mathcal{S}_{\text{Cu}} - \mathcal{S}_{\text{Ni}})(T - T_0). \end{aligned}$$

Použitím hodnôt z tabuľky 5.1 nájdeme $U = 21,5 \mu\text{V}$. Na presné merania teploty vo vybranom mieste termočlánkom sa používajú voltmetre s rozlíšením až 100 nV.

Úloha 5.2.7 Rovnica stacionárneho vedenia tepla pre materiál so skríženými javmi, produkcia tepla a Thomsonov koeficient.

- (1) Prepíšte rovnice (5.2.23) a (5.2.24) tak, aby vyjadrovali závislosti hustoty toku tepla \vec{j}_Q a hustoty toku prúdu \vec{j}_q od gradientu teploty ∇T a vektora $\vec{E}' = \vec{E} - \nabla(\mu/F)$. Na vyjadrenie hustoty toku entropie použite vzťah (5.2.7)
- (2) Upravte rovnice nájdene v bode (1) tak, že z nich vyjadríte \vec{j}_Q a \vec{E}' pomocou ∇T a j_q a parametrov λ, γ, Π a stavových veličín T a μ .
- (3) Dosadením vyjadrení z predchádzajúceho bodu do rovnice spojitosti pre vnútornú energiu (5.2.1) ukážte, že stacionárna rovnica vedenia tepla v takomto materiáli má tvar

$$0 = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \mathcal{K} \vec{j}_q \cdot \nabla T + \frac{1}{\gamma} j_q^2,$$

kde $\mathcal{K} = \frac{d\Pi}{dT} - \Pi/T$ sa nazýva *Thomsonov koeficient*. Prvý člen produkcie tepla môže byť kladný aj záporný, druhý člen predstavuje objemovú hustotu Joulových strát.

Pomôcky: Pri úprave predpokladajte, že nerovnovážny stav látky je ustálený, a preto $\nabla \cdot \vec{j}_q = 0$ a $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. V istom momente použite vzťah $\nabla \Pi = \frac{d\Pi}{dT} \nabla T$, t. j. že Peltierov koeficient sa môže meniť v závislosti od teploty, a preto jeho gradient je pri nehomogénnom teplotnom poli nenulový.

$$\vec{j}_Q = - \left(L_{11} - \frac{L_{12}^2}{L_{22}} \right) \nabla T + \frac{L_{12}T}{L_{22}} \vec{j}_q \quad (5.2.41)$$

$$\vec{E}' = \frac{T}{L_{22}} \vec{j}_q + \frac{L_{21}}{L_{22}} \nabla T \quad (5.2.42)$$

Úloha 5.2.8 Wiedemann a Franz v roku 1853 experimentálne zistili, že pomer koeficientu tepelnej vodivosti a konduktivity je pre rôzne kovy pri tej istej teplote to isté číslo. Ludwig Lorenz v roku 1872 (opäť experimentálne) zistil, že tento pomer je úmerný teplote kovov, pričom konštanta úmernosti, dnes nazývaná *Lorenzovo číslo*, je pre mnohé kovy približne rovnaká. Tento výsledok vysvetlil v roku 1900 Paul Drude pomocou kinetickej teórie elektrónov v kove. Výsledok bol

$$L_D = \frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{8}{\pi} \frac{k_B^2}{e^2}.$$

Arnold Sommerfeld Drudeho vzťah modifikoval a dal do súladu s kvantovou teóriou pre takmer voľné elektróny v kovoch. Jeho výsledok z roku 1927 je

$$L_S = \frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B^2}{e^2}.$$

(1) Pomocou tabuľky 5.1 rozhodnite, či kvantová teória vysvetľuje Wiedemannove–Franzove a Lorenzove experimenty lepšie ako Drudeho výsledok.

(2) Selén je polovodič, a preto jeho elektrická vodivosť je mnoho rádov menšia ako elektrická vodivosť kovov. Jeho tepelná vodivosť je teda dominantne realizovaná nie vodivostnými elektrónmi, ako je to pri kovoch, ale kmitmi atómov mriežky. Na základe tejto predstavy a platnosti Sommerfeldovho výsledku pre Lorenzovo číslo aj pre vodivostné elektróny v Bizmute (kov) odhadnite, aký je príspevok kmitov mriežky k tepelnej vodivosti Bizmutu.

5.3 Tenzor viskózneho napätia

V tejto časti sformulujeme rovnice nerovnovážnej lineárnej termodynamiky pre jednozložkovú tekutinu ako je napríklad voda, chladiaci olej alebo suchý

vzduch ⁴. Izotropné tekutiny, pre ktoré je prístup lineárnej nerovnovážnej termodynamiky postačujúci, sa nazývajú *Newtonovské kvapaliny*.

Dosadením rovnice spojitosti pre hmotnostnú vnútornú energiu (4.3.5) do Gibbsovej rovnice (5.1.3) nájdeme vyjadrenie pre zmenu entropie,

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T} \nabla \cdot \vec{j}_{u,nc} + \frac{1}{T} \left(\vec{\sigma} : \nabla \vec{v} + p\rho \frac{d\mathcal{V}}{dt} \right) \quad (5.3.1)$$

Rovnicu upravíme do tvaru rovnice spojitosti pre hmotnostnú entropiu. V prvom kroku upravíme prvý člen na pravej strane do tvaru úplnej divergencie a zvyšku,

$$-\frac{1}{T} \nabla \cdot \vec{j}_{u,nc} = -\nabla \cdot \left(\frac{\vec{j}_{u,nc}}{T} \right) + \vec{j}_{u,nc} \cdot \nabla \frac{1}{T} = -\nabla \cdot \left(\frac{\vec{j}_{u,nc}}{T} \right) - \frac{1}{T^2} \vec{j}_{u,nc} \cdot \nabla T. \quad (5.3.2)$$

Tenzor napätia rozdelíme na vratnú časť, danú rovnovážnym tlakom a nevratnú časť,

$$\vec{\sigma} = -p\vec{1} + \vec{\sigma}_N \quad (5.3.3)$$

a člen s objemom jednotkovej hmotnosti \mathcal{V} upravíme použitím rovnice kontinuity,

$$p\rho \frac{d\mathcal{V}}{dt} = p\rho \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} = -p\nabla \cdot \vec{v} = -p\vec{1} : \nabla \vec{v}, \quad (5.3.4)$$

Z posledného nájdeme, že rovnovážny tlak z rovnice (5.3.1) vypadne. Použitím týchto úprav nachádzame *rovnice spojitosti pre hmotnostnú entropiu* pre tekutiny

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\nabla \cdot \vec{j}_{s,nc} + \sigma_s, \quad (5.3.5)$$

kde *produkcia entropie* je daná vzťahom

$$\sigma_s = -\frac{1}{T^2} \vec{j}_{u,nc} \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \vec{\sigma}_N : \nabla \vec{v}, \quad (5.3.6)$$

a nekonvektívna časť *hustoty toku entropie*

$$\vec{j}_{s,nc} = \frac{\vec{j}_{u,nc}}{T}. \quad (5.3.7)$$

⁴Vzduch je síce viacložkový plyn, ale pre prestup tepla toto možno úplne zanedbať. Suchý vzduch neobsahuje vodnú paru, ktorej prípadná kondenzácia na prestup tepla vplyv samozrejme má.

Hustotu toku tepla v prúdiacich tekutinách môžeme zaviesť vzťahom $\vec{j}_Q = T\vec{j}_{s,nc}$, čo zjednoduší zápis ale najmä vedie k jednoduchšiemu slovnému pomenovaniu. Podobne sme definovali hustotu toku tepla pre tuhé látky rovnicou (5.2.9), kde sme ale nešpecifikovali, že ide len o nekonvektívnu časť, nakoľko konvektívna hustota toku $\vec{j}_{s,c} = s\rho\vec{v}$ je v tuhých látkach nulová.

Podobne ako v prípade tuhých látok má produkcia entropie tvar súčiny zovšeobecnených tokov a síl a vyžadujeme od nej splnenie princípu pozitivity produkcie entropie. V prípade jednozložkovej tekutiny identifikujeme dva zovšeobecnené toky – hustotu toku tepla a nerovnovážny tenzor napätia a dve zovšeobecnené sily – gradient teploty (vektor) a gradient rýchlostného poľa (tenzor). Nakoľko tenzory sa pri natočení súradnicovej sústavy transformujú inak ako vektory, tak pre izotropné tekutiny nemôže existovať vzťah lineárnej úmernosti medzi tenzorom gradient rýchlosti a vektorom hustoty toku tepla. V lineárnom priblížení a z kladnej definitnosti produkcie entropie preto vyplývajú dva nezávislé vzťahy. Prvý sa týka vzťahu medzi hustotou toku tepla, danou hustotou toku entropie a gradientom teplotného poľa,

$$\vec{j}_Q = T\vec{j}_{s,nc} = -\lambda\nabla T, \quad (5.3.8)$$

ktorý je identický s Fourierovým zákonom pre vedenie tepla v tuhých látkach. Uvážili sme pritom predpoklad o izotropnosti tekutiny a Curieho princíp. Tekutiny teda rovnako ako tuhé látky charakterizujeme koeficientom tepelnej vodivosti λ .

Druhým a doposiaľ nediskutovaným párom zovšeobecnených síl a tokov v produkcii entropie 5.3.6 je nerovnovážna časť tenzora napätia (zovšeobecnený tok) a gradient rýchlostného poľa (zovšeobecnená sila). V zložkovom zápise tieto veličiny predstavujú matice – $\sigma_{N,ij}$ a $\partial v_i/\partial x_j$. Najvšeobecnejší lineárny homogénny vzťah medzi nimi vyžaduje tenzor štvrtého rádu

$$\sigma_{N,ij} = \sum_{k,l=x}^z c_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial v_l}, \quad (5.3.9)$$

no tento veľký počet (3^4) koeficientov možno pre izotropné kvapaliny dramaticky znížiť.

V prvom kroku rozdelíme maticu derivácií rýchlostného poľa na tri časti: antisymetrickú časť $(\partial v)_{ij}^a$, symetrickú časť s nulovou stopou $(\partial v)_{ij}^s$ a skalárnu diagonálnu časť $(\partial v)_{ij}^d$. Takýto rozklad možno jednoznačne spraviť pre

ľubovoľnú maticu m_{ij} podľa predpisov

$$m_{ij}^a = \frac{1}{2}(m_{ij} - m_{ji}), \quad (5.3.10)$$

$$m_{ij}^s = \frac{1}{2}(m_{ij} + m_{ji}) - \frac{1}{D}\delta_{ij} \sum_k m_{kk} \quad (5.3.11)$$

$$m_{ij}^d = \frac{1}{D}\delta_{ij} \sum_k m_{kk}. \quad (5.3.12)$$

kde D je hodnosť matice (dimenzia). Napr. pre matice tenzora 3×3 je $D = 3$, pre matice tenzora 2×2 je $D = 2$. Pomerne ľahko sa možno presvečiť, že platí identita

$$m_{ij} = m_{ij}^a + m_{ij}^s + m_{ij}^d \quad (5.3.13)$$

a pre dve ľubovoľné matice m_{ij} a n_{ij} platí

$$\sum_{ij} m_{ij}^a n_{ji}^s = 0 \quad (5.3.14)$$

$$\sum_{ij} m_{ij}^a n_{ji}^d = 0 \quad (5.3.15)$$

$$\sum_{ij} m_{ij}^s n_{ji}^d = 0 \quad (5.3.16)$$

Ak si na takéto tri zložky rozdelíme aj tenzor napätia, potom produkciu entropie v dôsledku týchto veličín možno napísať v tvare

$$\sigma_s = \frac{1}{T} \sum_{ij} \sigma_{N,ij}^a (\partial v)_{ji}^a + \frac{1}{T} \sum_{ij} \sigma_{N,ij}^s (\partial v)_{ji}^s + \frac{1}{T} \sum_{ij} \sigma_{N,ij}^d (\partial v)_{ji}^d. \quad (5.3.17)$$

Dá sa ukázať, že antisymetrická časť $(\partial v)_{ji}^a$ charakterizuje čistú rotáciu tekutiny [11] a táto prirodzene nie je spojená s produkciou entropie. Preto $\sigma_{N,ij}^a = 0$.

Ostávajúce dve časti sú z pohľadu symetrie vzhľadom na otáčanie súradnicovej sústavy odlišné, a preto z pohľadu produkcie entropie nezávislé. Aby sme splnili lokálnu formuláciu druhého zákona termodynamického, musí byť $\sigma_s \geq 0$ z čoho potom vyplýva

$$\sigma_{N,ij}^s = 2\eta^{(1)}(\partial v)_{ij}^s \quad (5.3.18)$$

a

$$\sigma_{N,ij}^d = 3\eta^{(2)}(\partial v)_{ij}^d. \quad (5.3.19)$$

$\eta^{(1)}$ nazývame *koeficientom dynamickej viskozity* alebo prvým koeficientom viskozity a $\eta^{(2)}$ nazývame *koeficientom objemovej viskozity* alebo druhým koeficientom viskozity. Názov druhého súvisí s tým, že pre nestlačiteľnú kvapalinu platí $(\partial v)_{ij}^d = \frac{1}{3}(\nabla \cdot \vec{v})\delta_{ij} = 0$. Pre nestlačiteľnú kvapalinu teda druhý koeficient viskozity vôbec nepotrebujeme a uplatní sa len v prípade, ak sa pri nerovnovážnom deji stláčaním mení objem.

Sčítaním symetrickej a diagonálnej časti získame nerovnovážnu časť tenzoru napätia – *tenzor viskózneho napätia*:

$$\begin{aligned}\sigma_{N,ij} &= 2\eta^{(1)}(\partial v)_{ij}^s + 3\eta^{(2)}(\partial v)_{ij}^d. \\ &= \eta^{(1)}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + \left(-\frac{2}{3}\eta^{(1)} + \eta^{(2)}\right)\delta_{ij}\sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k}.\end{aligned}\quad (5.3.20)$$

Úloha 5.3.1 Ukážte, že rovnicu spojitosti pre hmotnostnú entropiu (5.3.1) možno napísať aj tvare

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}_s + \sigma_s,$$

kde $\vec{j}_s = \rho s \vec{v} + \vec{j}_{s,nc}$ je celková hustota toku entropie.

Príklad 5.3.2 Majme 2×2 maticu $\sigma_{ij} = \delta_{i,1}\delta_{j,2}$, $i, j = 1, 2$. Presvedčte sa, že v maticovom zápise ide o maticu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (5.3.21)$$

Nájdite jej antisymetrickú časť, symetrickú časť s nulovou stopou a časť ktorá je násobkom jednotkovej matice.

Riešenie:

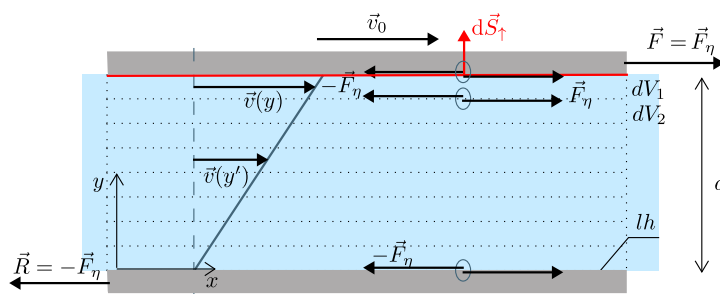
$$\sigma_{ij}^s = \frac{1}{2}(\delta_{i,1}\delta_{j,2} + \delta_{j,1}\delta_{i,2}) - \frac{1}{2}\delta_{ij}(0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\quad (5.3.22)$$

$$\sigma_{ij}^a = \frac{1}{2}(\delta_{i,1}\delta_{j,2} - \delta_{j,1}\delta_{i,2}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\quad (5.3.23)$$

Vidíme, že symetrická s nulovou stopou/antisymetrická časť tenzora je daná maticou symetrickou/antisymetrickou okolo jej diagonály. A aj priamo na pohľad vidíme že platí $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^a$.

5.4 Fyzikálna interpretácia viskozity

Zavedenie viskozity v predchádzajúcej časti bolo značne formálne. Jej prejav na správanie sa tekutín v jednoduchých ale reálnych situáciách nám túto materiálovú charakteristiku tekutín priblíži.



Obr. 5.4.1: Ak na pohyblivú dosku položenú na kvapaline s hĺbkou d pôsobíme konštantnou silou \vec{F}_η , bude sa doska pohybovať konštantnou rýchlosťou \vec{v}_0 . Nenulová veľkosť tejto sily je dôsledkom rozpochybovania vrstiev kvapaliny, ktorých rýchlosť lineárne narastá od nepohyblivého dna až po pohyblivú dosku.

Predstavme si plytkú nádobu naplnenú kvapalinou v pokoji. Na časť hladiny kvapaliny položíme plávajúcu dosku, ako je to znázornené na obrázku 5.4.1. Ak budeme dosku ťahať pomocou silomera po hladine zistíme, že na dosiahnutie určitej konštantnej no nie príliš veľkej rýchlosti, musíme dosku ťahať konštantnou silou. Charakter prúdenia možno experimentálne pozorovať pomocou malých čiastočiek v kvapaline (napríklad farbiva) pričom sa ukazuje, že rýchlosť kvapaliny je orientovaná paralelne k doske aj dnu v cele hĺbke a jej veľkosť lineárne narastá od nuly pri dne po rýchlosť pohybujúcej sa dosky pri rozhraní s ňou. Z tohto prichádzame k dôležitému pozorovaniu, že *tangenciálna zložka rýchlosti tekutín na rozhraní s tuhou látkou je nulová*. Veľkosť ťahovej sily sa experimentálne ukazuje byť úmerná veľkosti kontaktnej plochy medzi plávajúcou doskou a kvapalinou S_\uparrow , veľkosti rýchlosti v_0 , ktorou dosku ťaháme a nepriamo úmerná výške hladiny kvapaliny od dna d ,

$$F_\eta = \eta \frac{S_\uparrow v_0}{d}. \quad (5.4.1)$$

Vzťah obsahuje konštantu úmernosti η , ktorá už nezávisí od geometrie ani kinematiky problému. Ukazuje sa, že závisí len od voľby kvapaliny a jej stavu. Táto konštanta je teda materiálovou charakteristikou kvapaliny a ako ukážeme v ďalšom, zodpovedá prvému koeficientu viskozity zavedenému v predchádzajúcej časti.

Na základe definície tenzora napätia, sila, ktorou pôsobí pohybujúca sa doska na kvapalinu, sa vypočíta plošným integrálom pozdĺž tohto rozhrania,

$$\vec{F}_\eta = \int d\vec{S}_\uparrow \cdot \vec{\sigma} \quad (5.4.2)$$

Vzhľadom na zvolenú orientáciu osí platí $d\vec{S}_\uparrow = dS_{\uparrow,y}\vec{j}$, $\vec{F}_\eta = F_{\eta,x}\vec{i}$, a preto x -ová zložka rovnice 5.4.2 je

$$F_{\eta,y} = \int dS_{\uparrow,x}\sigma_{xy}. \quad (5.4.3)$$

Rovnovážny tenzor napätia tekutín je diagonálny, nediagonálny je len nerovnovážny príspevok. Podľa rovnice 5.3.20 bude v situácii na obrázku ($\vec{v} = v_x(y)\vec{i}$) nenulová len zložka

$$\sigma_{xy} = \eta^{(1)} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \eta^{(1)} \frac{v_0}{d}$$

Výsledná sila pôsobiaca na kvapalinu

$$F_{\eta,y} = \int dS_{\uparrow,x}\sigma_{xy} = S_\uparrow \eta^{(1)} \frac{v_0}{d} \quad (5.4.4)$$

má experimentálne nájdený tvar (5.4.1) a teda η aj $\eta^{(1)}$ predstavujú jednu a tú istú materiálovú charakteristiku.

Fyzikálny rozmer dynamickej viskozity je $[\eta] = \text{Pa}\cdot\text{s}$, používa sa aj jednotka *poise*, pričom $1\text{P} = 0,1\text{Pa}\cdot\text{s}$. Alternatívne sa používa aj koeficient *kinematickej viskozity*

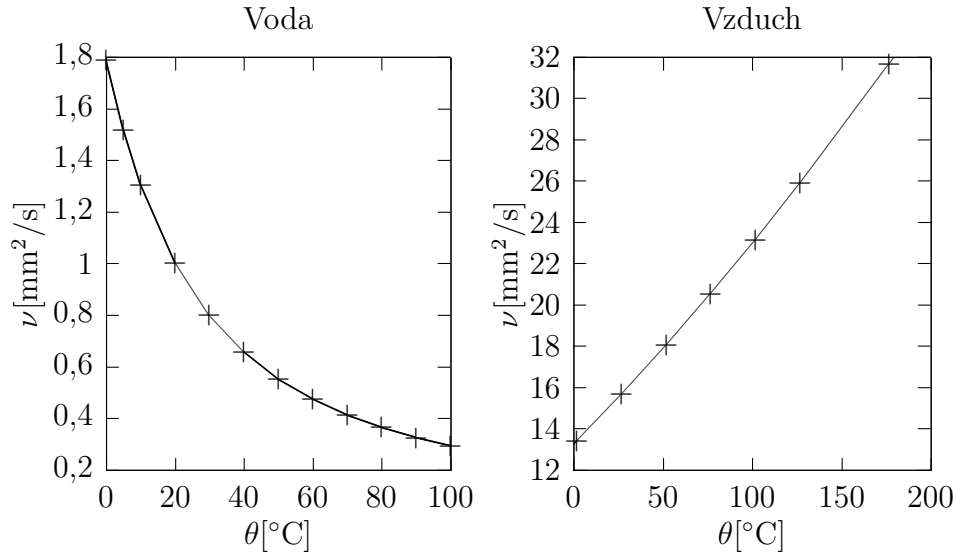
$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad [\nu] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}. \quad (5.4.5)$$

Viskozita ako každý kinetický koeficient lineárnej nerovnovážnej termodynamiky závisí od lokálneho termodynamického stavu látky, pričom najvýraznejšou býva jej závislosť od teploty. Dva príklady teplotnej závislosti kinematickej viskozity pre vodu a vzduch sú na obrázku 5.4.2.

5.5 Pohybová rovnica viskóznej tekutiny

V časti 3.3 sme z úvah o silovom pôsobení na pohybujúci sa hmotnostný element odvodili všeobecnú pohybovú rovnicu látky,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \vec{\sigma}, \quad (5.5.1)$$



Obr. 5.4.2: Závislosť kinematickej viskozity vody a vzduchu od teploty pri atmosférickom tlaku. Kým viskozita kvapalín s teplotou typicky klesá, pre plyny je to naopak.

kde $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$ je rýchlostné pole látky, $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ je jej hustota, \vec{f} je ďalekodohová sila pôsobiaca na jednotku hmotnosti látky, t. j. gravitačné zrýchlenie \vec{g} a $\vec{\sigma}$ je tenzor napätia predstavujúci krátkodosahové silové pôsobenie v látke.

Konkrétny tvar tenzora napätia určí, či rovnica bude opisovať deformovateľnú tuhú látku, viskóznu tekutinu alebo plyn. V časti 3.3 sme videli, že časť tenzora napätia je určená tlakom, $\vec{\sigma}_R = -p\vec{1}$. Tento príspevok predstavuje *rovnovážny* príspevok k tenzoru napätia, nakoľko z hľadiska termodynamického je tlak stavovou veličinou a prejavuje sa prostredníctvom výrazu pre rovnovážnu prácu na tekutine $\delta W = -p dV$. Ak je tekutina stlačiteľná, potom tlak je v rámci lineárnej nerovnovážnej termodynamiky určený lokálnymi stavovými veličinami, t. j. hustotou a teplotou $p = p(\rho(\vec{r}, t), T(\vec{r}, t))$. Hustota musí spĺňať rovnicu spojitosti

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v}\rho). \quad (5.5.2)$$

V pohybovej rovnici (5.5.1) vystupuje divergencia celkového tenzora napätia, daného súčtom rovnovážnej časti $\vec{\sigma}_R$ a nerovnovážneho príspevku $\vec{\sigma}_N$

(5.3.20). Použitím týchto vzťahov nachádzame,

$$\sum_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \eta^{(1)} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\eta^{(1)}}{3} + \eta^{(2)} \right) \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, j = x, y, z \quad (5.5.3)$$

čo možno vhodne prepísať aj do vektorového tvaru

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\sigma} &= -\nabla p + \nabla \cdot (\eta^{(1)} \nabla \vec{v}) + \nabla \left[(\eta^{(1)}/3 + \eta^{(2)}) \nabla \cdot \vec{v} \right] \\ &= -\nabla p + \nabla \cdot (\eta \nabla \vec{v}) + \nabla (\eta' \nabla \cdot \vec{v}), \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

kde sme zaviedli koeficient objemovej viskozity

$$\eta' = \eta^{(1)}/3 + \eta^{(2)}. \quad (5.5.5)$$

Dosadením vyjadrenia pre divergenciu tenzoru napätia do (5.5.1) nájdeme pohybovú rovnicu tekutiny

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \nabla \cdot (\eta \nabla \vec{v}) + \nabla (\eta' \nabla \cdot \vec{v}) + \rho \vec{g}. \quad (5.5.6)$$

Ak je kvapalina nestlačiteľná, tak namiesto termodynamického vzťahu pre tlak používame podmienku nestlačiteľnosti,

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (5.5.7)$$

ako dodatočnú rovnicu na výpočet tlaku⁵. Druhé časté zjednodušenie pre tekutiny predstavuje predpoklad, že závislosť viskozity od teploty a ďalších stavových veličín nie je dôležitá, $\eta \approx konst.$ Tieto predpoklady vedú k zjednodušeniu pohybovej rovnice tekutiny na *Navierovu–Stokesovu rovnicu*

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{g}. \quad (5.5.8)$$

kde $\nu = \eta^{(1)}/\rho$ je *koeficient kinematickej viskozity*. Napriek zjednodušeniam jej všeobecné riešenie nepoznáme, nakoľko hydrodynamická derivácia robí túto rovnicu nelineárnou vzhľadom na neznáme rýchlostné pole. Navierova–Stokesova rovnica je stredobodom záujmu nielen inžinierov venujúcich sa hydrodynamike, ale aj matematikov [15] – za dôkaz existencie jej riešenia je vypísaná odmena milión dolárov.

⁵Pohybová rovnica je vektorová diferenciálna rovnica, a teda predstavuje tri diferenciálne rovnice. Podmienka nestlačiteľnosti je skalárna rovnica. Týmto máme k dispozícii spolu štyri rovnice pre štyri neznáme funkcie – tri zložky rýchlostného poľa a tlak.

K využitiu pohybovej rovnice viskózne tekutiny na opis konvekcie tepla sa vrátíme v kapitole 8. Na ilustráciu riešenia prúdenia kvapalín sú uvedené nasledujúce dva príklady.

Príklad 5.5.1 Nájdite riešenie stacionárnej Navierovej–Stokesovej rovnice pre laminárne prúdenie kvapaliny medzi dvoma paralelnými horizontálnymi platňami, ak horná platňa sa pohybuje konštantnou rýchlosťou $\vec{v} = v_0\vec{i}$. Vzdialenosť platní je h , viskozita kvapaliny je η . Ako veľkou a ako orientovanou silou pôsobí kvapalina na hornú a spodnú platňu?

Riešenie: Predpokladáme, že prúdenie je laminárne a rýchlosť bude mať len horizontálnu zložku, pričom rýchlosť nebude závisieť od horizontálnej súradnice (y) kolmej na smer rýchlosti dosky, t. j. $\vec{v} = v_x(x, z)$. Rovnica kontinuity v tejto situácii vyžaduje $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$.

V dôsledku viskozity sa kvapalina pri povrchu platní nepohybuje. Okrajové podmienky sú preto dané platňami – pri spodnej platni musí byť $\vec{v} = 0$, pri vrchnej platni $v_z = 0$, $v_x = v_0$.

z -ová zložka stacionárnej Navierovej–Stokesovej rovnice bude

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

Integrovaním nájdeme $p(z) = c(x) + (h - z)\rho g$, pričom jedinú integračnú konštantu $c(x)$ určíme z tlaku na rozhraní platne a kvapaliny vo výške $z = h$, t. j. $c(x) = p_a$. Táto konštantka nezávisí od x , a preto tlak ako funkcia premenných x, z bude

$$p(x, z) = p_a + (h - z)\rho g.$$

x -ová zložka stacionárnej NS rovnice nadobudne tvar

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}.$$

Nakoľko $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ musí platiť

$$v_x(z) = az + b.$$

Po využití okrajových podmienok na $v_x(z)$:

$$v_x(z) = \frac{v_0}{h} z.$$

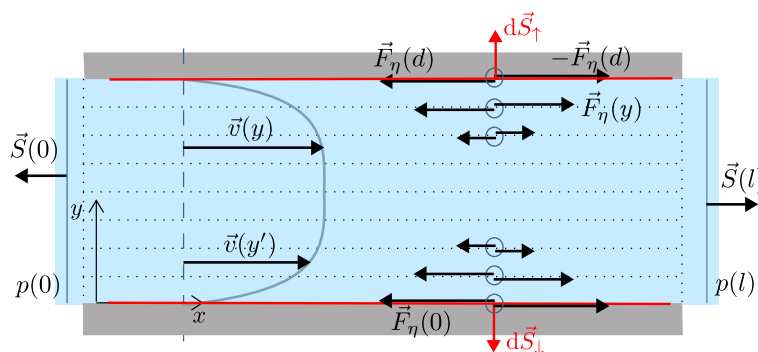
Silu pôsobiacu na hornú platňu nájdeme pomocou tenzoru napätia (element plochy hornej platne bude $-\vec{k}dS$):

$$\vec{F} = \int d\vec{S} \cdot \vec{\sigma} = (-S\vec{k}) \cdot (\vec{k}\vec{i})\eta \frac{dv_x}{dz} = (-\vec{i})\eta v_0 \frac{S}{h}$$

Kvapalina teda brzdí pohybujúcu sa platňu. Tento koncept možno využiť na meranie viskozity kvapalín.

Príklad 5.5.2 (1) Nájdite rýchlostný profil pre laminárne prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny medzi dvoma nepohyblivými platňami na vzdialenosti ℓ , na ktorej poklesne tlak v kvapaline o Δp . (2) Nájdite priemernú rýchlosť prúdenia kvapaliny. (3) Určte celkovú silu, ktorou pôsobia platne na kvapalinu na dĺžke ℓ . (4) Nájdite vzťah medzi poklesom tlaku Δp a priemernou rýchlosťou prúdenia. Situácia modeluje prúdenie cez potrubie s dĺžkou ℓ a s obdĺžnikovým prierezom $S = hd$, so šírkou $d \ll h$. h explicitne neuvažujeme, predpokladáme, že je veľmi veľké. Okrem toho vieme, že tlak v potrubí poklesne na vzdialenosti ℓ o Δp . Gravitačné pole zanedbajte.

Riešenie:



Obr. 5.5.1: Ak kvapalina tečie medzi dvoma nepohyblivými paralelnými doskami, potom v dôsledku viskózneho pôsobenia kvapaliny na dosky musí tlak pozdĺž prúdenia klesať. Rýchlostný profil jednotlivých vrstiev kvapaliny má parabolický profil.

(1) Problém riešime podobne ako príklad 5.5.1, len okrajové podmienky na rýchlosť sú nulové v $y = 0$ aj $y = d$ a naopak, tlak má nenulový pokles, t. j. napr. $p(x = 0) = \Delta p$ a $p(x = \ell) = 0$. Situácia je zobrazená na Obr. 5.5.1 z -ová zložka stacionárnej Navierovej–Stokesovej rovnice bude

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow p(x, z) = c(x)$$

x -ová zložka stacionárnej NS rovnice nadobudne tvar

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Separáciou premenných nájdeme dve rovnice:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = c, \quad \rho\nu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = c$$

Konštanta c je určená predpísaným poklesom tlaku, a teda $p(x) = \Delta p - (\Delta p/\ell)x$. Integrovaním druhej odseparovanej rovnice nájdeme

$$v_x(y) = -\frac{\Delta p}{\ell\eta} \frac{y^2}{2} + ay + b$$

Aplikovaním okrajových podmienok na rýchlosť $v_x(0) = 0$ a $v_x(d) = 0$ nakoniec nájdeme

$$v_x(y) = \frac{\Delta p}{2\ell\eta} y(d-y).$$

(2) Podobný výpočet je spravený pre valcové potrubie v príklade 2.2.1.

(3) Postupujeme podobne ako v príklade 5.5.1, výsledok je

$$\vec{F} = \Delta p h d (-\vec{i})$$

Tento výsledok je zjavný aj z 2. Newtonovho zákona – sila, ktorou pôsobí tlaková sila na kvapalinu na dĺžke ℓ je kompenzovaná viskóznou silou trenia kvapaliny o platne. Len ak je celkový súčet síl nulový, môže sa kvapalina pohybovať s konštantnou rýchlosťou, tak ako sme našli v tomto príklade.

5.6 Rovnica vedenia tepla

Rovnica vedenia tepla určuje časový vývoj aj priestorový charakter teplotného poľa v látke. Pri jej odvodení vychádzame z vyjadrenia vnútornej energie ako jednoznačnej funkcie teploty a ostatných nezávislých stavových veličín látky. V prípade jednozložkovej látky postačujú dve nezávislé veličiny – teplota a hustota. Pre jednoduchosť budeme uvažovať len tento prípad.

V kapitole 4.3 sme sformulovali rovnicu spojitosti pre vnútornú energiu

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla \cdot \vec{j}_{u,nc} + \sigma_u. \quad (5.6.1)$$

kde $\vec{j}_{u,nc} = \vec{j}_u - \rho \vec{v}u$ je hustota toku vnútornej energie bez jej konvektívnej časti $\rho \vec{v}u$. Produkciu vnútornej energie vieme vyjadriť pomocou výsledkov z opisu látky ako spojitého prostredia, pomocou stopy zo súčinu tenzora

napätia a gradientu rýchlosti a súčinu ďalekodosahových síl a difúzných tokov podľa vzťahu (4.3.2),

$$\sigma_u = \vec{\sigma} : \nabla \vec{v} + \sum_{\alpha} \vec{j}_{\alpha} \cdot \vec{f}_{\alpha}. \quad (5.6.2)$$

V praktických úlohách ju často zadávame aj ako známu veličinu, predstavujúcu napr. lokálne Joulove straty.

Hustotu toku vnútornej energie vyjadríme pomocou výsledkov lineárnej nerovnovážnej termodynamiky, napríklad pre tuhé látky s pohyblivými nosičmi náboja pomocou vzťahov (5.2.7) a (5.2.23)⁶. Pre jednozložkovú látku bude hustota nekonvektívneho toku vnútornej energie daná hustotou toku tepla podľa Fourierovho zákona (5.3.8),

$$\vec{j}_{u,nc} = -\lambda \nabla T. \quad (5.6.3)$$

Dosadením tohto vzťahu do rovnice spojitosti pre vnútornú energiu dostaneme

$$\rho \frac{du}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \sigma_u. \quad (5.6.4)$$

Lokálna teplota $T(\vec{r}, t)$ vstupuje do tejto rovnice ako neznáma veličina.

Vo všeobecnosti je vnútorná energia závislá od nevyhnutného počtu nezávislých stavových veličín⁷; pre stlačiteľnú tekutinu by týmito veličinami mohli byť objem na jednotku hmotnosti, hustota alebo tlak. Vyberieme si teplotu a objem na jednotku hmotnosti. V kapitole 1.7, v príklade 1.7.1 bol odvodený vzťah pre úplný diferenciál vnútornej energie. Jeho vyjadrenie pre jednotkovú hmotnosť látky je

$$du = c_V dT + \left(-p + T \frac{\beta}{\kappa} \right) dV \quad (5.6.5)$$

⁶Napríklad, pre tuhú látku, v ktorej sú pohyblivé nosiče náboja, sa možno pomocou úlohy (5.2.7) presvedčiť, že toto platí pri uvažovaní veľmi rýchlej relaxácie pohyblivého náboja a zanedbateľnej veľkosti Thomsonovho koeficientu \mathcal{K} .

⁷V prípade tuhej látky s pohyblivými nosičmi náboja, ktorú sme uvažovali v časti 5.2, by sme podobne našli vzťah

$$du = c_n dT + \left(\mu - T \left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_n \right) dn.$$

Prvý člen v zátvorke sa vyruší s príspevkom v hustote toku vnútornej energie, ktorý je úmerný $\nabla \cdot \vec{j}_q$ a druhý člen, úmerný derivácii chemického potenciálu podľa teploty, je v kovoch zanedbateľný. Preto sa tieto dva príspevky pri riešení rovnice vedenia tepla neuvažujú.

kde c_V je hmotnostná tepelná kapacita pri konštantnom objeme, κ koeficient objemovej rozťažnosti a β koeficient objemovej teplotnej rozpínavosti.

Vyjadrením hydrodynamickej derivácie pomocou úplného diferenciálu hmotnostnej vnútornej energie nájdeme rovnicu vedenia tepla pre stlačiteľnú látku,

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} + \rho \left(-p + \frac{T\beta}{\kappa} \right) \frac{d\mathcal{V}}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \sigma_u. \quad (5.6.6)$$

Člen

$$-\rho p \frac{d\mathcal{V}}{dt} = \frac{p d\rho}{\rho dt} = -p \nabla \cdot \vec{v},$$

ktorý sme upravili pomocou rovnice spojitosti pre hustotu, sa nachádza aj vo výraze pre produkciu vnútornej energie ako súčasť tenzora napätia (4.3.2), a teda z rovnice vypadne. Produkciu vnútornej energie, ktorá túto vratnú časť práce neobsahuje, si označíme $\sigma_{u,N}$, takže rovnica vedenia tepla nadobudne tvar

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} - \frac{T\beta d\rho}{\rho \kappa dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \sigma_{u,N}. \quad (5.6.7)$$

Rovnica (5.6.7) obsahuje aj deriváciu hustoty podľa času, a preto je nevyhnutné ju riešiť spolu s rovnicou spojitosti pre hustotu. Všetky uvedené charakteristiky látky – c_V, β, κ aj λ sú vo všeobecnosti funkciami stavových veličín ρ a T . Aby bola sústava rovníc uzavretá, je nevyhnutné poznať aj rýchlostné pole, vystupujúce v hydrodynamických deriváciách a v rovnici spojitosti pre hustotu. Potrebná je teda aj pohybová rovnica látky, ktorá vyžaduje znalosť tlaku prípadne tenzora napätia, čo opäť môžu byť funkcie lokálnych stavových veličín.

Nakoniec uvedme, že na hľadanie riešenia takejto sústavy parciálnych diferenciálnych rovníc sú potrebné aj počiatkové a okrajové podmienky pre teplotné a rýchlostné pole a hustotu na plochách ohraničujúcich látku. Okrajovým podmienkam pre rovnicu vedenia tepla sa budeme venovať v nasledujúcej kapitole a počiatkovým podmienkam v kapitole o prechodných dejoch.

Príklad 5.6.1 Nájdite produkciu vnútornej energie v dôsledku viskózneho trenia pre prípad laminárneho prúdenia nestlačiteľnej kvapaliny v cylindrickej potrubí s polomerom R .

Riešenie: Budeme uvažovať, že os potrubia je v smere z a radiálny smer si označíme premennou r . Rýchlostný profil laminárneho prúdenia je daný predpisom $\vec{v} = \vec{e}_z v_M \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$, a teda nenulová bude len z -ová zložka rýchlosti, ktorá sa mení len v smere radiálnom,

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} \neq 0. \quad (5.6.8)$$

Ostatné derivácie všetkých zložiek rýchlosti budú nulové. Viskózný tenzor (5.3.18) zapísaný v cylindrických súradniciach bude mať nenulové len zodpovedajúce zložky,

$$\vec{\sigma}_N^s = \sigma_{rz}(\vec{e}_r\vec{e}_z + \vec{e}_z\vec{e}_r)$$

kde

$$\sigma_{rz} = \eta \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

Produkcia vnútornej energie je podľa rovnice (4.3.2)

$$\begin{aligned} \sigma_u &= \vec{\sigma} : \nabla \vec{v} = -p \nabla \cdot \vec{v} + \vec{\sigma}_N^s : \nabla \vec{v} \\ &= \sum_{i,j} \sigma_{N,ij}^s (\nabla \vec{v})_{ji} = \eta \frac{\partial v_z}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.6.9)$$

kde sme využili, že pre nestlačiteľnú kvapalinu platí $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Vidíme, že produkcia je vždy kladná. Vzhľadom na prítomnosť tohto člena ale so záporným znamienkom aj v rovnici spojitosti pre makroskopickú kinetickú energiu (4.2.7) môžeme tvrdiť, že v dôsledku viskozity sa makroskopická kinetická energia premieňa na vnútornú energiu prúdiacej tekutiny. S týmto istým výrazom súvisí aj kladný príspevok k produkcii entropie podľa rovnice (5.3.17).

Pre konkrétny parabolický profil rýchlosti nájdeme,

$$v_z(r) = v_0(1 - r^2/R^2) \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = -v_0 \frac{2r}{R^2} \rightarrow \dot{q} = \eta v_0^2 \frac{4r^2}{R^4}, \quad (5.6.10)$$

a teda najviac tepla v dôsledku viskózneho trenia sa tvorí pri stene potrubia ($r = R$).

Úloha 5.6.2 Pomocou výsledku z príkladu 5.6.1 nájdite, o koľko stupňov sa ohreje voda v potrubí s polomerom $R = 1$ cm v dôsledku viskózneho trenia na jednom metri jeho dĺžky, ak ním preteká tokom $J_V = 11$ l/s. Teplota vody na vstupe nech je $\vartheta_0 = 1$ °C a steny potrubia považujte za dokonale tepelne izolované.

Úloha 5.6.3 Ukážte, že rovnica vedenia tepla pre nestlačiteľnú kvapalinu má tvar

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \sigma_{u,N}.$$

Úloha 5.6.4 Ukážte, že rovnica vedenia tepla pre ideálny plyn má tvar

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \sigma_u.$$

Úloha 5.6.5 Ukážte, že ak by sme si namiesto objemu a teploty vybrali stavové premenné teplotu a tlak, tak by sme našli ekvivalentné vyjadrenie rovnice vedenia tepla v tvare

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} - \beta T \frac{dp}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \sigma_{u,N}.$$

V termohydraulike je zápis pomocou teploty a tlaku asi najobľúbenejší. Zmeny tlaku sa často zanedbávajú. Výsledná rovnica sa zvykne nazývať Fourierova–Kirchhoffova diferenciálna rovnica.

Kapitola 6

Stacionárne vedenie tepla v tuhých látkach

V tejto kapitole preberieme základné úlohy stacionárneho vedenia tepla v tuhých látkach, t. j. *kondukciu*. Tieto úlohy sú užitočné ako cvičné problémy, no zároveň sú dôležité aj pre aplikačnú prax. Súčasťou formulácie úloh o vedení tepla je voľba vhodných okrajových podmienok. Pri ich výbere je dôležité rozumieť fyzikálnym dôvodom, ktoré rozhodujú o ich konkrétnom tvare. V mnohých problémoch možno a aj výpočtovo je výhodné nahradiť riešenie rovnice vedenia tepla modelom pozostávajúcim zo sériovo-paralelne zapojených tepelných odporov, inokedy je vhodné použiť opis problematiky pomocou efektívnych jednorozmerných modelov. Okrem opisu ich použitia sa budeme venovať aj diskusii hraníc ich použiteľnosti. Pomerne jednoduchý úvodný text k tejto problematike predstavujú skriptá od Kalouska a Hučka [16]. Vysokoškolská učebnica Prenos tepla od Ferstla a Masaryka [17] je zameraná pre študentov strojníckych fakúlt a obsahuje veľké množstvo praktických postupov tepelných výpočtov. Užitočným informačným zdrojom k tematike prestupu tepla s množstvom inžinierskych príkladov predstavuje učebnica od Holmana [18] alebo jej ekvivalenty [19, 20].

6.1 Stacionárna rovnica vedenia tepla

Riešenie rovnice nazývame stacionárnym, ak nezávisí od času. Preto preň platí $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. V tejto kapitole sa budeme venovať vedeniu tepla v nepohyblivom prostredí, t. j. rýchlostné pole bude identicky nulové $\vec{v} = 0$. Preto nie len parciálna derivácia podľa času, ale aj celá hydrodynamická derivácia teploty bude nulová. Rovnica vedenia tepla (5.6.7) takto nadobudne tvar

$$0 = \nabla \cdot \lambda \nabla T + \sigma_u. \quad (6.1.1)$$

Ďalšie časté zjednodušenie predstavuje predpoklad, že tepelnú vodivosť môžeme považovať za konštantu. V takomto prípade rovnica vedenia tepla nadobudne tvar

$$0 = \lambda \nabla^2 T + \sigma_u \quad (6.1.2)$$

kde $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ je Laplaceov operátor.

Všetky úlohy, ktoré budeme analyticky riešiť, budú mať kvázi jednorozmerný charakter. Znamená to, že teplota sa významne mení len v jednej dimenzii. V prípade rovinných úloh, ako je napríklad vedenie tepla stenou, to znamená, že teplota bude funkciou len jednej karteziánskej premennej, napr. x . V takomto prípade budú v Laplaceovom operátore nulové druhé derivácie podľa súradníc y a z a rovnica vedenia tepla nadobudne tvar

$$0 = \frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right) + \sigma_u. \quad (6.1.3)$$

Ak má problém cylindrickú symetriu a zároveň translačnú symetriu pozdĺž osi, bude teplota závisieť len od radiálnej súradnice r . S využitím tvaru gradientu a divergencie v cylindrických súradniciach možno nájsť rovnicu pre vedenie tepla v tvare

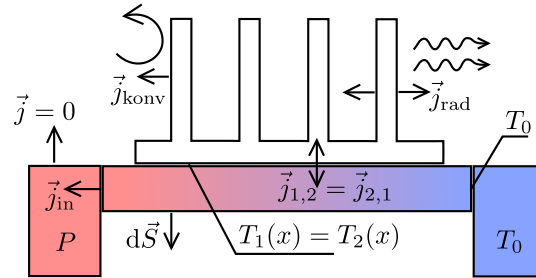
$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial}{\partial r} T(r) \right) + \sigma_u. \quad (6.1.4)$$

V praxi väčšinou nepracujeme s absolútnou termodynamickou teplotou $T(\vec{r})$, ale s Celziovou teplotou, ktorú budeme označovať $\vartheta(\vec{r})$. Tieto dve veličiny sa líšia len o konštantný posun, ktorý pre rovnicu vedenia tepla nie je dôležitý, derivácia ho odstráni. Niekedy je výhodné ísť ešte ďalej a pracovať len s tzv. *oteplením*, ktoré predstavuje rozdiel teploty telesa voči inej referenčnej teplote, napríklad voči teplote okolitého prostredia. Opäť ide len o posun o konštantu, čo sa na samotnej diferenciálnej rovnici neprejaví. Pre jednoduchosť budeme niekedy aj oteplenie označovať $\vartheta(\vec{r})$, no tento fakt bude v texte zdôraznený.

Sú ale aj situácie, keď posun teploty o konštantu je dôležitý. Napríklad ak uvažujeme závislosť materiálových charakteristík od teploty, keď je potrebné vedieť model, ktorý túto závislosť opisuje, alebo úlohy spojené s tepelným žiarením, kde pri určovaní hustoty toku tepelného žiarenia využívame Stefanov-Boltzmannov zákon vyžadujúci absolútnu termodynamickú teplotu.

6.2 Okrajové podmienky

Teplotné pole spĺňa rovnicu vedenia tepla len vnútri oblasti, v ktorej sa nachádza študované teleso alebo látka. Na jej hranici sa vlastnosti materiálu



Obr. 6.2.1: Príklady využitia okrajových podmienok, s ktorými sa stretávame pri vedení tepla. Mostík je uložený medzi výhrevným telesom so stratovým výkonom P a veľmi dobre tepelne vodivým rezervoárom s teplotou T_0 . Okrem toho, mostík je aj v kontakte s chladičom, ktorého rebrá odvádzajú teplo prostrediu radiačným aj konvektívnym mechanizmom.

menia skokom, resp. látka výrazne mení svoj charakter, napr. na kvapalinu alebo plyn. Podobne, na rozhraní dvoch rôznych tuhých látok sa vlastnosti tiež zmenia skokom. V týchto miestach musíme špecifikovať okrajové podmienky, ktoré musí teplotné pole spĺňať. Bez ich zadania neexistuje jednoznačné matematické riešenie úlohy vedenia tepla.

Dirichletova okrajová podmienka predstavuje predpísanie hodnoty teploty danou funkciou $f(\vec{r})$ na hranici S oblasti riešenia,

$$\vartheta|_S = f(\vec{r}). \quad (6.2.1)$$

Skrátený zápis $\vartheta|_S$ označuje vyhodnotenie teploty $\vartheta(\vec{r})$ v miestach \vec{r} ležiacich na povrchu S .

V jednoduchých úlohách predstavuje funkcia $f(\vec{r})$ konštantnú hodnotu. Na obrázku (6.2.1) je táto podmienka využitá na hľadanie teploty v mostíku na jeho kontaktnej ploche s rezervoárom s teplotou T_0 , t. j. $f(\vec{r}) = T_0$. O rezervoári predpokladáme, že je tepelne veľmi dobre vodivý a veľmi veľký, a preto je teplota v ňom konštantná.

Neumannova okrajová podmienka predstavuje predpísanie normálovej hustoty toku tepla $j_Q(\vec{r})$ na hranici oblasti riešenia,

$$-\lambda \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial \vec{n}} \right|_S = j_Q(\vec{r}), \quad (6.2.2)$$

kde $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} = \vec{n} \cdot \nabla$ predstavuje zápis derivácie v smere vonkajšej normály \vec{n} hraničnej plochy.

V jednoduchých úlohách býva $j_Q(\vec{r}) = j_Q$, konštantný na hraničnej ploche. Na obrázku (6.2.1) je táto okrajová podmienka využitá pre výhrevné teleso, pri ktorom sa predpokladá, že až na kontakt s mostíkom je tepelne veľmi dobre izolované. Na tepelne izolovanej hranici je $j_Q(\vec{r}) = 0$. Na kontaktnej ploche s mostíkom musí byť hustota toku nenulová, lebo celkový dodávaný stratový výkon v telese P sa musí pri stacionárnom riešení z telesa odvádzať. Preto na ploche kontaktu s mostíkom bude $j_Q(\vec{r}) = P/S$, kde S je veľkosť plochy rozhrania s mostíkom. Aj na riešenie teplotného pola v mostíku je na tomto rozhraní použitá Neumannova okrajová podmienka s takouto istou hustotou tepelného toku. Nakoľko vonkajšia normála pre mostík na tejto hranici je v smere $-\vec{i}$ a súradnica x narastá v smere \vec{i} , bude Neumannova podmienka pre teplotné pole v mostíku nadobúdať tvar

$$+\lambda \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_S = -\frac{P}{S}. \quad (6.2.3)$$

V prípade stacionárnych úloh nemožno Neumannovu okrajovú podmienku predpísať *ľubovoľne* na celej hranici oblasti riešenia úlohy. Ak totiž preintegrujeme rovnicu vedenia tepla cez celú oblasť riešenia a použijeme Gaussovu vetu, nájdeme, že celkový tok tepla z oblasti sa rovná celkovej produkcii vnútornej energie vnútri oblasti. Jednoducho povedané, zákon zachovania energie obmedzuje voľnosť voľby veľkosti hustoty toku tepla vo všetkých častiach hranice.

Konvektívna okrajová podmienka (tiež *zmiešaná* alebo *Robinova*) predstavuje opis kontaktu tuhého telesa s tekutinou, ktorá odvádza teplo z povrchu telesa. Vedenie tepla v tekutine má dominantne charakter konvekcie, t. j. prenosu tepla prúdením tekutiny, z čoho pochádza aj názov pre tento typ okrajovej podmienky. Jej tvar je

$$-\lambda \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial \vec{n}} \right|_S = \alpha(\vartheta|_S - \vartheta_\infty), \quad (6.2.4)$$

kde α je *koeficient prestupu tepla* medzi študovaným telesom a tekutinou a ϑ_∞ je teplota tekutiny vo veľkej vzdialenosti od telesa. Koeficient α závisí od vlastností tekutiny v *hraničnej vrstve* pri povrchu telesa (viskozita, tepelná vodivosť, rýchlosť prúdenia atď.) a jej geometrických parametrov (dĺžka a zakrivenie obtekaného povrchu). Hraničná vrstva predstavuje typicky úzku oblasť tekutiny, kde sa jej lokálna rýchlosť a teplota výrazne mení v závislosti od vzdialenosti od povrchu telesa. Na určenie hodnoty koeficientu prestupu tepla sa v praxi používajú *kritériálne rovnice*, s ktorými sa oboznámime v kapitole 8. Uvedomme si, že v prípade konvektívnej okrajovej podmienky nie je zadaná ani hodnota teploty ani hodnota jej derivácie na hraničnej ploche, iba matematický vzťah medzi nimi.

Radiačná okrajová podmienka kvantifikuje vyžarovanie a absorpciu tepelného žiarenia povrchom:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right|_S = \epsilon \sigma_{\text{SB}} (T|_S)^4 - j_{\text{rad}} \quad (6.2.5)$$

kde $\sigma_{\text{SB}} \approx 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ je Stefanova–Boltzmannova konštanta, ϵ je emisivita povrchu a j_{rad} je množstvo energie elektromagnetického žiarenia dopadajúce z okolia za jednotku času, ktoré sa absorbuje jednotkou plochy rozhrania. Výpočtom j_{rad} pre sústavu povrchov telies sa budeme detailnejšie venovať v kapitole 9.

Stefanov–Boltzmannov zákon určuje *intenzitu vyžarovania povrchu* na základe absolútnej hodnoty teploty povrchu, a preto v tomto prípade použijeme absolútnu teplotu T a nie Celziovú teplotu ϑ . Ak je ale rozdiel teploty povrchu a teploty okolia malý v porovnaní s absolútnou teplotou oboch, potom možno radiačnú okrajovú podmienku linearizovať a jej účinok zahrnúť do efektívneho koeficientu prestupu tepla (príklad 6.2.1).

Podmienky na rozhraní medzi rôznymi materiálmi. Ak sa materiálové parametre menia skokom, vyžadujeme, aby teplota bola spojitá a zároveň aby súčet hustoty toku tepla v smere vonkajších normál dotýkajúcich sa povrchov bol nulový,

$$\vartheta_1|_S = \vartheta_2|_S, \quad (6.2.6)$$

$$-\lambda_1 \left. \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \vec{n}_1} \right|_S - \lambda_2 \left. \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \vec{n}_2} \right|_S = 0. \quad (6.2.7)$$

Tieto podmienky sú dôsledkom rovnice spojitosti pre vnútornú energiu, ak ju preintegrujeme cez infinitezimálne nízky valcový objemový element, ktorého jedna podstava je na strane materiálu 1 a druhá na strane materiálu 2. Odvodenie je analogické odvádzaniu spojitosti normálovej zložky indukcie elektrického a magnetického poľa na rozhraní dvoch materiálov.

Príklad 6.2.1 *Stefanov–Boltzmannov zákon* tvrdí, že z jednotkovej plochy povrchu absolútne čierneho telesa s termodynamickou teplotou T sa do okolitého priestoru vyžaruje výkon

$$M = \sigma_{\text{SB}} T^4 \quad (6.2.8)$$

kde $\sigma_{\text{SB}} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^{-4}$ je Stefanova–Boltzmannova konštanta.

Emisivita povrchu charakterizuje pomer intenzity vyžarovania tepelného žiarenia určitého reálneho povrchu M' ku intenzite vyžarovania povrchu absolútne čierneho telesa s tou istou teplotou T ,

$$\epsilon = \frac{M'}{\sigma_{\text{SB}} T^4} \quad (6.2.9)$$

Intenzitu tepelného vyžarovania reálneho povrchu vyjadrujeme teda pomocou vzťahu $M' = \epsilon M = \epsilon \sigma_{\text{SB}} T^4$. Vzhľadom na túto definíciu, emisivita pre daný povrch môže byť funkciou teploty T . Typické hodnoty emisivity pre infračervené žiarenie matného elektricky nevodivého povrchu bývajú blízke k 1. Naopak, leský kovový povrch má emisivitu bežne menšiu ako 0,1.

Ak uvažujeme malú povrchovú plôšku telesa dS , potom jej tepelné vyžarovanie do okolia bude

$$dJ_{Q,\text{out}} = \epsilon \sigma_{\text{SB}} T^4 dS. \quad (6.2.10)$$

Na druhej strane, všetky telesá v okolí plôšky s teplotou okolia T_∞ tiež vyžarujú a odrážajú tepelné žiarenie, ktorého časť dopadá aj na plôšku dS a absorbuje sa. Toto množstvo absorbovaného tepelného žiarenia si označíme $dJ_{Q,\text{in}}$

Celkové množstvo tepla odchádzajúce z plôšky dS je teda

$$dJ_Q = \epsilon \sigma_{\text{SB}} T^4 dS - dJ_{Q,\text{in}} \quad (6.2.11)$$

V prípade ak je teleso v termodynamickej rovnováhe so vzdialeným okolím, t. j. $T = T_\infty$, musí byť celkový tok tepla povrchom telesa nulový, a preto¹

$$0 = \epsilon \sigma_{\text{SB}} T_\infty^4 dS - dJ_{Q,\text{in}} \Rightarrow dJ_{Q,\text{in}} = \epsilon \sigma_{\text{SB}} T_\infty^4 dS \quad (6.2.12)$$

Z posledného vyplýva, že ak teleso nie je v termodynamickej rovnováhe s okolím, ale všetky telesá okolia (steny miestnosti atď.) medzi sebou v rovnováhe sú, potom teplo unikajúce plôškou telesa bude

$$dJ_Q = \epsilon \sigma_{\text{SB}} T^4 dS - dJ_{Q,\text{in}} \quad (6.2.13)$$

$$= \epsilon \sigma_{\text{SB}} (T^4 - T_\infty^4) dS \quad (6.2.14)$$

V prípade, že je teplota plôšky len o málo odlišná od teploty okolia, môžeme použiť Taylorov rozvoj funkcie štvrtej mocniny v okolí teploty okolia,

$$dJ_Q = dS \epsilon \sigma_{\text{SB}} \left((T_\infty + \tilde{\vartheta})^4 - T_\infty^4 \right) \quad (6.2.15)$$

$$\approx dS \epsilon \sigma_{\text{SB}} \left(T_\infty^4 + 4T_\infty^3 \tilde{\vartheta} + \dots - T_\infty^4 \right) = dS \epsilon \sigma_{\text{SB}} 4T_\infty^3 \tilde{\vartheta} \quad (6.2.16)$$

kde $\tilde{\vartheta} = T - T_\infty$ je oteplenie plôšky voči okoliu.

¹Implikácia v nasledovnej rovnici nie je úplne pravdivá; k $dJ_{Q,\text{in}}$ by sme mohli pripočítať ľubovoľnú funkciu rozdielu $T - T_\infty$ a uvedená podmienka by bola splnená. Že je nájdený výsledok správny, je ukázané v úlohe 9.3.

Ak si označíme $\alpha_{\text{rad}} = 4\epsilon\sigma_{\text{SB}}T_{\infty}^3$ ako efektívny koeficient prestupu tepla z plôšky v dôsledku tepelného žiarenia, dostávame vzťah

$$j_q = \frac{dJ_Q}{dS} = \alpha_{\text{rad}}\tilde{\vartheta}. \quad (6.2.17)$$

Pre $\epsilon \sim 0,9$, $T_{\infty} = 298 \text{ K}$ a $\sigma_{\text{SB}} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ nájdeme hodnotu efektívneho koeficientu prestupu tepla v dôsledku tepelného žiarenia

$$\alpha_{\text{rad}} \approx 5,4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \quad (6.2.18)$$

6.3 Analógia s elektrostatikou

Rovnica (6.1.2) predstavuje z matematického hľadiska Poissonovu rovnicu, rovnako ako analogickú rovnicu v elektrostatike pre elektrostatický potenciál a nábojovú hustotu,

$$0 = \nabla^2\phi + \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.3.1)$$

Úlohu elektrického poľa, $\vec{E} = -\nabla\phi$, má v tejto analógii hustota toku tepla

$$\vec{j}_Q = -\lambda\nabla\vartheta \quad (6.3.2)$$

Veľa riešení v problematike vedenia tepla sa preto bude podobáť na riešenia z elektrostatiky.

Príklad 6.3.1 Veľmi dlhý priamy elektrický vodič je zakopaný v zemi, ktorá má priemernú tepelnú vodivosť λ . Aký bude priebeh teploty v zemi v smere kolmo od vodiča ak celkový stratový výkon na jednotku jeho dĺžky je p ?

Riešenie: Použijeme Gaussovú vetu v cylindrickej symetrii:

$$\int dS \cdot \vec{j}_Q = 2\pi r j_Q = p \Rightarrow \vec{j}_Q = \frac{p}{2\pi r} \vec{e}_r, \quad (6.3.3)$$

kde \vec{e}_r je jednotkový vektor v radiálnom smere. Integráciou rovnice 6.3.2 vyjadrenej v cylindrických súradniciach a s použitím nájdenej prúdovej hustoty vypočítame teplotné pole:

$$\frac{p}{2\pi r} \vec{e}_r = -\lambda \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \vartheta(r) \quad (6.3.4)$$

$$\vartheta(r) = -\frac{p}{2\pi\lambda} \ln(r) + \text{konst} \quad (6.3.5)$$

Na určenie integračnej konštanty môžeme použiť napríklad zadanie známej teploty v určitej vzdialenosti od osi vodiča, $\vartheta(R)$.

6.4 Analógia s prúdovým poľom

Veľmi názorná je aj analógia medzi vedením tepla a tokom elektrického prúdu. Hustota elektrického prúdu daná Ohmovým zákonom

$$\vec{j}_q = \gamma \vec{E} = -\gamma \nabla \phi \quad (6.4.1)$$

je analógiou Fourierovho zákona vedenia tepla

$$\vec{j}_Q = -\lambda \nabla \vartheta. \quad (6.4.2)$$

Analógiou elektrického poľa je priamo gradient teploty so záporným znamienkom. V oboch prípadoch pritom platí rovnica

$$\nabla \cdot \vec{j} = \sigma \quad (6.4.3)$$

kde v prípade prúdových poľí má σ význam množstva elektrického náboja, ktorý sa objavuje v danom mieste na jednotku objemu za jednotku času. Doslovne toto nie je možné – elektrický náboj sa zachováva, ale napríklad pri riešení prúdového poľa v rovine si zdroj elektrického náboja $\sigma(r)$ môžeme predstaviť ako koniec prúdovodiča nakontaktovaný v mieste \vec{r} na uvažovanej rovine, ktorý v tomto mieste dodáva do úlohy potrebný náboj za jednotku času.

6.5 Tepelný odpor

Tepelný odpor, ktorý je analogický elektrickému odporu, udáva úmernosť medzi tokom tepla J_Q a rozdielom teplôt medzi dvoma plochami s konštantnou teplotou. Je teda definovaný vzťahom

$$R_T = \frac{\Delta \vartheta}{J_Q}. \quad (6.5.1)$$

Jeho fyzikálna jednotka je $\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$. Používanie tepelného odporu je najlepšie motivovať konkrétnym príkladom.

Príklad 6.5.1 Hliníková tyč s kruhovým prierezom $S = 1\text{cm}^2$ má dĺžku $\ell = 0,5\text{m}$. Jej konce sú v kontakte s tepelnými rezervoármi s teplotami $\vartheta(0) = 60\text{ }^\circ\text{C}$ a $\vartheta(\ell) = 10\text{ }^\circ\text{C}$. Zvyšok jej povrchu je dokonale izolovaný. Nájdite celkový tok tepla tyčou a jej tepelný odpor. Tepelná vodivosť hliníka je $\lambda = 200\text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$.

Riešenie: Z dôvodov symetrie očakávame, že teplota bude len funkciou súradnice z pozdĺž osi tyče. Tento predpoklad zabezpečí nulový tok tepla cez valcový povrch tyče. Rovnica vedenia tepla potom nadobudne tvar

$$\frac{d^2\vartheta}{dz^2} = 0$$

jej všeobecným riešením je ľubovoľná lineárna funkcia,

$$\vartheta(z) = az + b.$$

Od hľadaného riešenia vyžadujeme splnenie okrajových podmienok $\vartheta(0)$ a $\vartheta(\ell)$,

$$\begin{aligned}\vartheta(0) &= a \cdot 0 + b \\ \vartheta(\ell) &= a \cdot \ell + b\end{aligned}$$

Ich vyriešením pre a a b nájdeme

$$b = \vartheta(0) \text{ a } a = \frac{\vartheta(\ell) - \vartheta(0)}{\ell}$$

Teplotné pole v tyči má teda tvar

$$\vartheta(z) = \frac{\vartheta(\ell) - \vartheta(0)}{\ell} z + \vartheta(0)$$

Hustota toku tepla bude

$$\vec{j}_Q = -\lambda \vec{k} \frac{d}{dz} \vartheta(z) = \lambda \frac{\vartheta(0) - \vartheta(\ell)}{\ell} \vec{k}$$

a celkový tok

$$J_Q = \int d\vec{S} \cdot \vec{j}_Q = S \lambda \frac{\vartheta(0) - \vartheta(\ell)}{\ell} \quad (6.5.2)$$

Po dosadení čísiel nájdeme $J_Q = 2 \text{ W}$.

Tepelný odpor nájdeme z definície

$$R_T = \frac{\Delta\vartheta}{J_Q} = \frac{1}{\lambda} \frac{\ell}{S} = \frac{60 - 10}{2} \text{ K/W} = 25 \text{ K/W}.$$

Z uvedeného príkladu vidíme, že tok tepla závisí len od rozdielu teplôt, nie ich absolútnych hodnôt. Toto pozorovanie platí všeobecne, ak materiálové parametre nezávisia od teploty. V praxi sa zavádza pojem *oteplenia* alebo

teplotného spádu voči referenčnej teplote. Vo vyššie uvedenom príklade veličina $\Delta\vartheta = \vartheta(0) - \vartheta(\ell)$ predstavuje teplotný spád teplejšieho rezervoáru voči chladnejšiemu a v rámci tyče by sme mohli úlohu formulovať pre jej oteplenie voči chladnejšiemu rezervoáru $\Delta\vartheta(z)$. Výsledok pre oteplenie môžeme rýchlo získať, ak teplotu na konci tyče, v referenčnom mieste, nastavíme na nulu. Vzťahy sa tak zjednodušia, len nesmieme zabudnúť, že takto spočítaná teplota je v skutočnosti oteplením.

Ako sme uviedli v úvode tejto časti rovnice (6.5.1, 6.5.2) sú analogické vzťahu medzi prúdom, napätím a odporom. Z rovnice (6.5.2) navyše vyplýva aj analogický vzťah pre tepelný odpor v prípade prestupu tepla cez stenu s plochou S a hrúbkou ℓ ,

$$R_T = \frac{1}{\lambda} \frac{\ell}{S}. \quad (6.5.3)$$

Pre všeobecné zavedenie pojmu tepelného odporu si predstavme, že poznáme stacionárne riešenie rovnice vedenia tepla v tuhej látke bez zdrojov tepla. V nej vyberme ohraničenú plochu S_1 , na ktorej je konštantná teplota ϑ_1 . Pretože na ploche je teplota konštantná, bude hustota tepelného toku na ňu kolmá. Orientáciu plochy zvolíme zhodne s orientáciou hustoty tepelného toku. K ploche S_1 vyberieme voči nej vysunutú plochu S_2 , na ktorej je konštantná teplota $\vartheta_2 < \vartheta_1$ a hranica S_2 je vytvorená tak, že pozdĺž toku tepla prenesieme hranicu plochy S_1 na plochu S_2 . Potom bude platiť

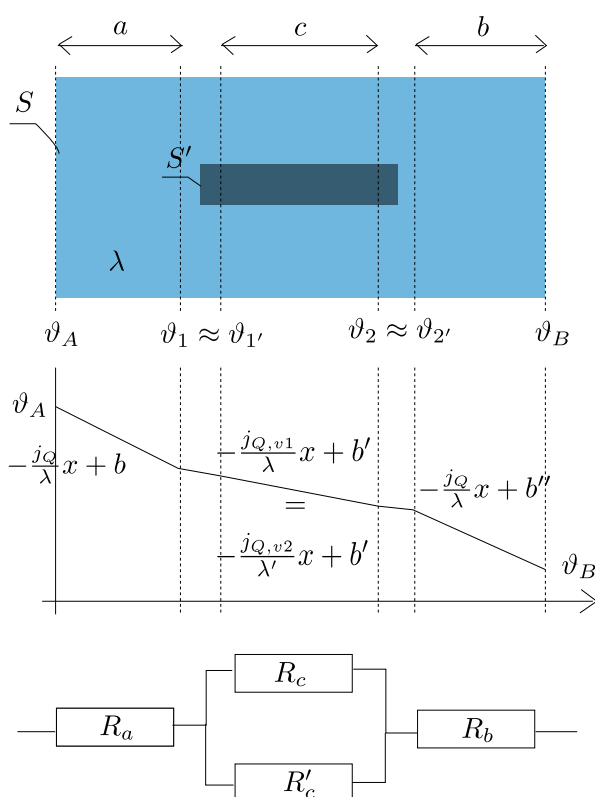
$$J_Q = \int_{S_1} dS \cdot \vec{j}_Q = \int_{S_2} dS \cdot \vec{j}_Q \quad (6.5.4)$$

Tepelný odpor medzi plochami S_1 a S_2 predstavuje výraz

$$R_T = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{J_Q}. \quad (6.5.5)$$

Úloha 6.5.2 Na odhad návratnosti tepelnej izolácie sa v technickej správe združenia PU Europe² používa teplotná priepustnosť $((R_T S)^{-1})$ starej strechy $1,52 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ a pre tepelne izolovanú strechu s 8 cm hrubou PUR izoláciou $0,3 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$. Priemerný ročný rozdiel teplôt medzi vonkajškom a vnútrojškom strechy v našich zemepisných šírkach je asi $10 \text{ }^\circ\text{C}$ a výrobné energetické náklady na 1 m^2 8 cm hrubého panelu 100 kWh . Po koľkých rokoch od izolovania s PUR panelmi bude investícia energeticky výhodná?

²https://www.pu-europe.eu/fileadmin/documents/Reports_public/BING_TECH_REP_on_Thermal_insulation_materials_made_of_rigid_polyurethane_foam.pdf



Obr. 6.6.1: V médiu s tepelnou vodivosťou λ sa nachádza pravouhlá oblasť s inou tepelnou vodivosťou λ' . Tepelný odpor takéhoto zloženého média môžeme odhadnúť náhradnou schémou tepelných odporov.

6.6 Skladanie tepelných odporov

Počítanie vedenia tepla cez oblasť, ktorú si vieme myslene rozdeliť na menšie pravouhlé oblasti, možno približne odhadnúť ako sériovo-paralelné skladanie tepelných odporov jednotlivých oblastí (Obr.6.6.1). Tento postup v sebe skrýva isté predpoklady, ktoré v ďalšom rozoberieme.

Zo symetrie od riešenia očakávame, že bude mať vertikálne plochy (čiar v 2D) na ktorých je teplota konštantná. V skutočnosti to nebudú roviny (priamky), a preto v miestach, kde sa mení tepelná vodivosť, budeme uvažovať segment konečnej šírky, v ktorom sa táto plocha konštantnej teploty nachádza. Predpokladáme, že uvažovaný segment je tenký, a teda môžeme všade v ňom považovať teplotu za približne rovnakú ($\vartheta_1 \approx \vartheta_{1'}$ a $\vartheta_2 \approx \vartheta_{2'}$ na obrázku 6.6.1). Mimo tieto segmenty má riešenie teplotného poľa lineárny

charakter, pričom smernica jeho nárastu dáva pomer hustoty tepelného toku a tepelnej vodivosti v tejto oblasti, pretože

$$j_Q = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \vartheta(x), \quad \vartheta(x) = kx + q \quad (6.6.1)$$

Rozdiel teplôt medzi koncami týchto oblastí závisí len od ich dĺžky,

$$\vartheta_A - \vartheta_1 = \frac{j_Q}{\lambda} a \quad (6.6.2)$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{j_{Q,v1}}{\lambda} c = \frac{j_{Q,v2}}{\lambda'} c \quad (6.6.3)$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_B = \frac{j_Q}{\lambda} b \quad (6.6.4)$$

V poslednom sme rovno použili rovnakú hustotu tepelného toku ako v prvej rovnici, pretože tieto segmenty majú rovnakú plochu S a nakoľko celkový tok tepla nimi musí byť rovnaký, bude rovnaká aj hustota toku tepla v nich.

V strednej oblasti musí byť celkový tok tepla daný súčtom tokov cez stredné dve oblasti,

$$J_Q = J_{Q,v1} + J_{Q,v2} = (S - S')j_{Q,v1} + S'j_{Q,v2} \quad (6.6.5)$$

Jedným z dôsledkov zavedenia prechodných segmentov je, že hustota tepelného toku v sériovo nasledujúcich oblastiach sa mení,

$$j_Q \neq j_{Q,v1} \neq j_{Q,v2}, \quad (6.6.6)$$

aj keď na presných rozhraniach daných rovinou, alebo plochou vo všeobecnosti, musí byť podmienka rovnosti hustôt toku tepla v jednej a druhej oblasti splnená.

Ak si zavedieme označenia tepelných odporov jednotlivých oblastí,

$$R_a = \frac{1}{\lambda} \frac{a}{S} \quad (6.6.7)$$

$$R_b = \frac{1}{\lambda} \frac{b}{S} \quad (6.6.8)$$

$$R_c = \frac{1}{\lambda} \frac{c}{S - S'} \quad (6.6.9)$$

$$R'_c = \frac{1}{\lambda'} \frac{c}{S'} \quad (6.6.10)$$

potom uvedené rovnice môžeme prepísať do tvaru

$$\vartheta_A - \vartheta_1 = R_a J_Q \quad (6.6.11)$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = R_c J_{Q,v1} = R'_c J_{Q,v2} \quad (6.6.12)$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_B = R_b J_Q \quad (6.6.13)$$

$$J_Q = J_{Q,v1} + J_{Q,v2}, \quad (6.6.14)$$

kde je podobnosť s pravidlami skladania sériových a paralelných odporov v elektrických obvodoch už zrejmá.

Úloha 6.6.3 Opíšte situáciu, keď predpoklady použitia sériovo-paralelného skladania tepelných odporov neplatia. Napríklad uvažujte $\lambda' \gg \lambda$ a a rôznej dĺžky.

6.7 Konvektívna okrajová podmienka a skladanie odporov

Ako bolo uvedené v časti 6.2, konvektívna okrajová podmienka opisuje výmenu tepla telesa s tekutinou, ktorá je s ním v kontakte. Odvod tepla charakterizujeme koeficientom prestupu tepla α .

Príklad 6.7.1 Hliníková tyč s kruhovým prierezom $S = 1\text{cm}^2$ má dĺžku $\ell = 0,5\text{m}$. Jej začiatok je v kontakte s tepelným rezervoárom s teplotou $\vartheta(0) = 60\text{ }^\circ\text{C}$ a jej koniec je v kontakte s chladiacim médiom, charakterizovaným koeficientom prestupu tepla $\alpha = 5\text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ a teplotou vo veľkej vzdialenosti $\vartheta(\infty) = 10\text{ }^\circ\text{C}$. Zvyšok jej povrchu je dokonale izolovaný. Nájdite celkový tok tepla tyčou a tepelný odpor medzi začiatkom tyče a chladiacim médiom. Tepelná vodivosť hliníka je $\lambda = 200\text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$.

Riešenie: Oproti príkladu z časti 6.5 sa úloha líši len okrajovou podmienkou pre $z = \ell$,

$$-\lambda \left. \frac{d\vartheta}{dz} \right|_{z=\ell} = \alpha(\vartheta(\ell) - \vartheta(\infty)) \quad (6.7.1)$$

Z prvej okrajovej podmienky nájdeme

$$\vartheta(0) = a \cdot 0 + b \rightarrow b = \vartheta(0)$$

Ak toto použijeme vo všeobecnom riešení, nájdeme $\vartheta(z) = az + \vartheta(0)$, čo po dosadení do okrajovej podmienky (6.7.1) vedie na rovnicu

$$-\lambda a = \alpha(a\ell + \underbrace{\vartheta(0) - \vartheta(\infty)}_{\Delta\vartheta})$$

$$a = -\frac{\Delta\vartheta}{\lambda/\alpha + \ell}$$

Výsledný priebeh teploty nakoniec bude

$$\vartheta(z) = -\frac{\Delta\vartheta}{\lambda/\alpha + \ell}z + \vartheta(0)$$

a tepelný tok

$$J_Q = S(-\lambda) \frac{d}{dz} \vartheta(z) = S \frac{\Delta \vartheta}{1/\alpha + \ell/\lambda} \quad (6.7.2)$$

Po dosadení čísiel nájdeme $J_Q \approx 2 \times 10^{-2} \text{ W}$. Výsledok je stokrát menší ako v prípade priameho kontaktu s tepelným rezervoárom!

Tepelný odpor získame opäť priamo z definície

$$R_T = \frac{\Delta \vartheta}{J_Q} = \frac{50}{2 \times 10^{-2}} \text{ K/W} = 2,5 \text{ K/mW}$$

Podobne, ako v prípade rezervoárov v príklade 6.7.1, zavádzame pre teleso v kontakte s prostredím celkový tepelný odpor

$$R_T = \frac{\Delta \vartheta}{J_Q} = \frac{1}{\lambda S} + \frac{1}{\alpha S} \quad (6.7.3)$$

Tento sa skladá z dvoch „sériových“ odporov: tepelný odpor samotného telesa $R_{T,\lambda} = \frac{1}{\lambda S}$ a *kontaktný odpor* spôsobený prestupom tepla medzi telesom a prostredím $R_\alpha = 1/(\alpha S)$.

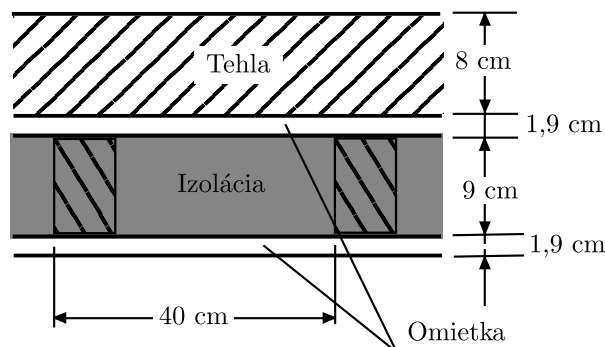
Oba príspevky sú úmerné ploche rozhrania S ; hodnota tepelného odporu na jednotku plochy rozhrania sa v anglickej literatúre nazýva *R value*. Treba byť obozretný, aby sa nezamieňala so samotným odporom. Jednota *R value* je $^\circ\text{C}/(\text{W} \cdot \text{m}^2)$.

Vidíme, že *R value* len samotného kontaktného tepelného odporu je obrátená hodnota koeficientu prestupu tepla.

Úloha 6.7.2

Prestup tepla cez viacvrstvovú stenu. Stena domu má štruktúru podľa obrázku (6.7.1). Drevené hranoly majú obdĺžnikový prierez so stranami $4 \text{ cm} \times 9 \text{ cm}$ a tepelnú vodivosť $0,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Tepelná vodivosť tehlovej steny je $0,69 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, izolácia minerálnou vatou $0,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a omietka $0,96 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Koeficient prestupu tepla na vnútornej strane steny je $7,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ a vonkajšej strane steny $15 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Aký je tepelný odpor jednotkovej plochy takejto steny? Na výpočet použite tabuľkový procesor.

Úloha 6.7.3 Koeficient prestupu tepla nezatepleného paneláku je $\alpha = 0,89 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$. Aký široký polystyrénový panel musíme použiť, aby celkový koeficient prestupu tepla zateplenej steny bol menší ako $0,16 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$? Tepelná vodivosť polystyrénu je $\lambda = 0,04 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$.



Obr. 6.7.1: Úsek steny skladajúcej sa z vonkajšej tehlovej vrstvy a izolovanej vrstvy s drevenými hranolmi.

6.8 Tepelný odpor valcovej plochy

Pri riešení prestupu tepla sa veľmi často stretávame s úlohami s približne cylindrickou symetriou. Takými sú napríklad výpočet izolácie potrubia s chladnou alebo horúcou vodou, alebo výpočet radiálneho teplotného profilu palibovej tyče v jadrových reaktoroch.

V prípade tenkých tyčí a potrubí navyše očakávame, že teplota sa bude najviac meniť v radiálnom smere, t. j. v kolmej vzdialenosti r od osi symetrie. Radiálny smer budeme označovať jednotkovým vektorom \vec{e}_r . Závislosť od súradnice z v axiálnom smere (smer daný jednotkovým vektorom \vec{e}_z), t. j. pozdĺž osi symetrie, sa v najjednoduchšom prístupe zanedbá, lebo predpokladáme, že táto zmena je relatívne pomalá voči zmenám teploty v radiálnom smere. V časti 6.10 sa vrátíme k tomu, ako možno zmenu teploty v axiálnom smere približne vyčíslit. Od poslednej cylindrickej súradnice uhla ϕ teplota vôbec nezávisí pre symetriu úlohy.

Stacionárna rovnica vedenia tepla v cylindrických súradniciach, s uvažovaním, že teplota je len funkciou r , má tvar

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial \vartheta(r)}{\partial r} \right) + \sigma_u \quad (6.8.1)$$

Budeme uvažovať len oblasť samotnej izolácie, ktorá nemá žiadne vlastné zdroje tepla, $\sigma_u = 0$. Nech sa izolácia nachádza medzi polomerami r_1 a r_2 a nech jej tepelná vodivosť je konštantná. Potom postupným integrovaním rovnice, predelením r a potom ešte raz integrovaním nájdeme jej všeobecné

riešenie

$$\vartheta(r) = c_1 \ln(r) + c_2 \quad (6.8.2)$$

Konštanty určíme z okrajových podmienok. Na vnútornej ploche predpíšeme tok tepla (v smere *do* izolácie),

$$\vec{j}(r_1) \cdot \vec{e}_r = j_0 \quad (6.8.3)$$

a na vonkajšej ploche konvektívnu podmienku

$$\vec{j}(r_2) \cdot \vec{e}_r = \alpha(\vartheta(r_2) - \vartheta_\infty) \quad (6.8.4)$$

Ak bude ϑ predstavovať *oteplenie* voči teplote okolia, potom $\vartheta_\infty = 0$, čo rovnicu zjednoduší. Prijmeme teda túto voľbu.

Hustota toku je daná výrazom

$$\vec{j}(r) = -\lambda \nabla \vartheta = -\lambda \vec{e}_r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \quad (6.8.5)$$

pretože ostatné zložky gradientu sú nulové – teplota nezávisí od z a ϕ .

Z podmienky v $r = r_1$ nájdeme

$$c_1 = -\frac{r_1 j_0}{\lambda} \quad (6.8.6)$$

Z podmienky v $r = r_2$ nájdeme

$$\frac{r_1}{r_2} j_0 = \alpha \left(-\frac{r_1 j_0}{\lambda} \ln r_2 + c_2 \right) \quad (6.8.7)$$

$$c_2 = \left(\frac{1}{r_2 \alpha} + \frac{1}{\lambda} \ln r_2 \right) r_1 j_0 \quad (6.8.8)$$

Dosadením c_1 a c_2 do všeobecného riešenia (6.8.2) nájdeme rozdiel teplôt medzi vnútornou plochou izolácie a prostredím ($\vartheta_\infty = 0$)

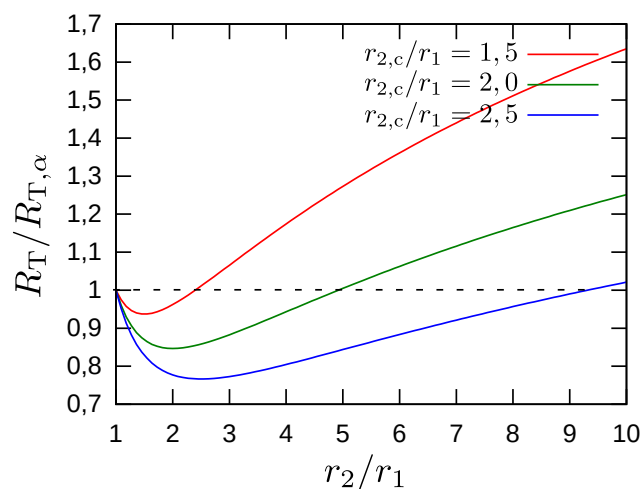
$$\Delta \vartheta = \vartheta(r_1) = \left(\frac{1}{r_2 \alpha} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) r_1 j_0 \quad (6.8.9)$$

Celkový tok tepla izoláciou na valcovej ploche s dĺžkou ℓ je $J_Q = 2\pi r_1 \ell j(r_1)$, a preto oteplenie na vnútornej strane izolácie bude

$$\Delta \vartheta = R_T J_Q, \quad (6.8.10)$$

kde

$$R_T = \frac{1}{2\pi \ell \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi r_2 \ell \alpha} \quad (6.8.11)$$



Obr. 6.8.1: Závislosť tepelného odporu valcovej izolácie od jej vonkajšieho polomeru (relatívne k hodnote vnútorného polomeru). Tepelný odpor nadobúda minimálnu hodnotu, keď sa jej vonkajší polomer rovná kritickému polomeru $r_{2,c} = \lambda/\alpha$.

je tepelný odpor na dĺžke ℓ . Vidíme, že podobne ako pri toku tepla rovinnou stenou, aj tu môžeme uvažovať celkový tepelný odpor ako tepelný odpor samotnej izolácie

$$R_{T,\lambda} = \frac{1}{2\pi\ell\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (6.8.12)$$

sériovo zložený s tepelným odporom *hraničnej vrstvy* prostredia okolo izolácie

$$R_{T,\alpha} = \frac{1}{2\pi r_2 \ell \alpha} = \frac{1}{S_2 \alpha}, \quad (6.8.13)$$

kde $S_2 = 2\pi r_2 \ell$ má význam veľkosti plochy rozhrania medzi izoláciou a prostredím.

Na výsledku (6.8.11) je zaujímavé, že nie je monotónnou funkciou vonkajšieho polomeru r_2 ; Pre malé hodnoty výraz klesá ako $\sim 1/r_2$ a pre veľké narastá ako $\sim \ln r_2$ (Obr. 6.8.1). Preto niekde medzi týmito krajnými situáciami pre *kritický polomer izolácie* nadobúda tepelný odpor minimum

$$\frac{dR_T}{dr_2} = 0 \rightarrow r_{2,c} = \frac{\lambda}{\alpha}. \quad (6.8.14)$$

Ekvivalentný polomer $r_{2,e}$ je taký vonkajší polomer izolácie, pri ktorom je

celkový tepelný odpor rovnaký, ako keby tam izolácia vôbec nebola,

$$\frac{1}{2\pi\ell\lambda} \ln \frac{r_{2,e}}{r_1} + \frac{1}{2\pi r_{2,e} \ell \alpha} = \frac{1}{2\pi r_1 \ell \alpha} = R_{T,\alpha}. \quad (6.8.15)$$

Túto rovnicu nemožno vyriešiť analyticky, ale aspoň pre $r_{2,e} \gg r_1$ platí

$$r_{2,e} = r_1 e^{r_{2,c}/r_1}. \quad (6.8.16)$$

Príklad 6.8.1 Izolácia na elektrickom vodiči. Nech vonkajší polomer vodiča (a teda vnútorný priemer izolácie) je $r_1 = 2$ mm. Elektrická izolácia (PVC) môže mať tepelnú vodivosť okolo $\lambda \sim 0,2$ W/(m · K). Kritický polomer $r_c = \lambda/\alpha = 4$ cm a ekvivalentný polomer je približne $r_e \sim 2$ mm · e^{20} , a teda každá rozumná elektrická izolácia bude elektrický vodič tepelne viac ochladzovať ako keby tam nebola.

Na druhej strane, trubica s teplou vodou s malým polomerom, povedzme $r_1 \sim 2$ cm by mala byť izolovaná s takýmto materiálom s hrúbkou porovnateľnou alebo väčšou ako $r_e \sim 2$ cm · $e^2 = 14,8$ cm aby mala vôbec nejaký zmysel.

Akonáhle ju ale budeme izolovať penovým tepelným izolantom s $\lambda \sim 0,02$ W/(m · K), bude jej kritický polomer $r_c = 4$ mm a $r_e \sim 2$ cm · $e^{0,2} \approx 2$ cm, a teda akákoľvek hrúbka takejto tepelnej izolácie bude mať už pozitívny efekt. V tomto prípade ale ide len o orientačný výsledok, lebo vzťah 6.8.16 je len približný a konkrétne v poslednom prípade dokonca mimo svojej približnej platnosti.

Úloha 6.8.2 Na izoláciu nádoby s tekutým dusíkom s teplotou -196 °C sa používa extrémne dobre izolujúci materiál s tepelnou vodivosťou 2×10^{-4} W/(m · K). Nádoba má tvar gule s vnútorným polomerom 0,52 m a hrúbkou steny s izoláciou 2,5 cm. Odhadnite množstvo dusíka, ktoré sa odparí za jeden deň, ak skupenské teplo odparovania tekutého dusíka je 199 kJ/kg a teplota okolia je 21 °C.

(1) Úlohu riešte v sférickej symetrii, pre ktorú má radiána časť Laplaceovho operátora tvar

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

(2) Úlohu riešte akoby šlo o rovinnú stenu, nakoľko hrúbka steny je oveľa menšia ako polomer nádoby.

6.9 Produkcia vnútornej energie a okrajové podmienky

Pri riešení úloh prestupu tepla sa stretávame so situáciami, keď je produkcia vnútornej energie nenulová. Najbežnejším príkladom sú Joulove straty v elektrickom vodiči. Vnútoraná energia generovaná za jednotku času na jednotku objemu je daná vzťahom (5.2.1)

$$\sigma_u = \vec{j}_q \cdot \vec{E} = \frac{j_q^2}{\gamma} \quad (6.9.1)$$

kde γ je elektrická vodivosť materiálu, \vec{j}_q je prúdová hustota toku elektrického náboja q a \vec{E} je intenzita elektrického poľa.

Iný dôležitý príklad predstavuje produkciu vnútornej energie látky v dôsledku brzdenia tepelných neutrónov v palivových tyčiach alebo ochranných stenách v jadrových reaktoroch.

Pre jednoduchosť uvažujme konštantnú produkciu vnútornej energie v stene hrubej ℓ s konštantným koeficientom tepelnej vodivosti λ . Rovnica vedenia tepla pre tento problém nadobudne tvar

$$0 = \lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \sigma_u. \quad (6.9.2)$$

Hodnota teploty v $x = 0$ a hodnota toku tepla v tomto istom mieste³ predstavujú okrajové podmienky,

$$\vartheta(x = 0) = \vartheta_0, \quad j_Q(x = 0) = j_0. \quad (6.9.3)$$

Mohli by sme vybrať aj iné okrajové podmienky, napríklad predpísanie teploty v oboch hraničných bodoch. V skutočnosti sú si všetky tieto prípady ekvivalentné, ak vhodne zameníme veličiny, ktoré považujeme za dané a tie, ktoré chceme dopočítať. Spravená voľba vedie na najjednoduchšie vzťahy pre všeobecný prípad a navyše je výhodná, ak na oboch stranách steny nasleduje ďalší pasívny materiál – či už tuhý alebo kvapalný, ako si ukážeme na konci tejto kapitoly.

Dvojnásobným integrovaním rovnice (6.9.2) a použitím uvedených podmienok nájdeme riešenie

$$\vartheta(x) = -\frac{\sigma_u}{2\lambda} x^2 - \frac{j_0}{\lambda} x + \vartheta_0 \quad (6.9.4)$$

³Z matematického hľadiska ide skôr o počiatočné podmienky, no nie v $t = 0$ ale v $x = 0$.

Teplota nadobúda maximum v mieste

$$x_{\max} = -\frac{j_0}{\sigma_u} \quad (6.9.5)$$

a jej hodnota je

$$\vartheta_{\max} = \frac{j_0^2}{2\lambda\sigma_u} + \vartheta_0 \quad (6.9.6)$$

Určenie maximálnej hodnoty teploty a jej miesta (*hot spot*) je v technickej praxi veľmi dôležité. V takomto mieste je vyššia pravdepodobnosť, že môže prísť k poškodeniu zariadenia v dôsledku prehriatia.

Druhým dôležitým parametrom je *priemerná teplota*. Jej hodnota v prípade rovinatej steny bude

$$\vartheta_{\text{av}} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \vartheta(x) dx = -\frac{\sigma_u \ell^2}{6\lambda} - \frac{j_0 \ell}{\lambda} + \vartheta_0 \quad (6.9.7)$$

Ak je úloha symetrická, t. j. $\vartheta(0) = \vartheta(\ell)$, potom musí platiť

$$j(0) = -j(\ell) = -\frac{\sigma_u \ell}{2} \quad (6.9.8)$$

t. j. polovica celkového dodávaného výkonu na jednotku plochy steny ($\sigma_u \ell$) prechádza do každej strany. Dosadením vyjadrenia pre $j_0 = j(0) = -\sigma_u \ell/2$ do vzťahov (6.9.5), (6.9.6), a (6.9.7) dostaneme výsledky pre tento špeciálny prípad.

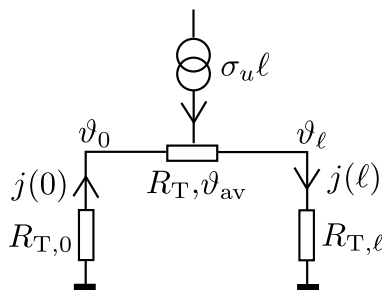
V nesymetrickom prípade, keď $\vartheta_\ell \neq \vartheta_0$, bude aj odvod celkového výkonu produkovaného v stene, nesymetrický. Iný tok tepla bude v $x = 0$ a v $x = \ell$,

$$j(0) = -\lambda \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{\sigma_u \ell}{2} - \lambda \frac{\vartheta_\ell - \vartheta_0}{\ell} \quad (6.9.9)$$

$$j(\ell) = -\lambda \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=\ell} = +\frac{\sigma_u \ell}{2} - \lambda \frac{\vartheta_\ell - \vartheta_0}{\ell} \quad (6.9.10)$$

Prvé príspevky k toku predstavujú symetrické rozdelenie celkového generovaného výkonu, druhé predstavujú superpozíciu toku tepla z okrajovej podmienky so zadaným oteplením voči $x = 0$.

Z nájdených výsledkov možno sformulovať aj všeobecnú úlohu, keď napravo a naľavo od steny je rôzne prostredie alebo zložená izolácia z viacerých vrstiev. Túto úlohu možno riešiť náhradnou schémou analogickou s elektrickým obvodom (Obr. 6.9.1). Uvažujme, že nakoniec na oboch stranách prideme k tej istej teplote okolia, ktorú zvolíme rovnú nule. Na výpočet



Obr. 6.9.1: Výpočet priemerného oteplenia steny možno spraviť aj pomocou náhradnej schémy s „prúdovým zdrojom“ a definovanými „napätiami“.

priemerného alebo maximálneho oteplenia steny zavedieme „súčiastku“ *tepelný odpor so zdrojom*, pre ktorú je vzťah medzi jeho prúdmi a napätiami na jeho dvoch póloch daný rovnicami (6.9.9) a (6.9.10). Tieto dve rovnice navyše dopĺňajú rovnice pre rozdiel teplôt na tepelných odporoch $R_{T,0}$ a $R_{T,\ell}$:

$$\vartheta_0 = -R_{T,0}j_0 \quad (6.9.11)$$

$$\vartheta_\ell = R_{T,\ell}j_\ell \quad (6.9.12)$$

V tejto formulácii sú teploty ϑ_0 a ϑ_ℓ , rovnako ako hustoty toku tepla j_0 a j_ℓ neznámymi. Okrajová podmienka je taká, že teplota sa rovná nule, ale až za materiálmi charakterizovanými tepelnými odporami $R_{T,0}$ a $R_{T,\ell}$. Riešením tejto sústavy 4 rovníc o 4 neznámých nájdeme

$$j_0 = -\sigma_u \ell \frac{\frac{\ell}{2\lambda} + R_{T,\ell}}{R_{T,0} + R_{T,\ell} + \frac{\ell}{\lambda}}. \quad (6.9.13)$$

Ak nás zaujíma napríklad priemerné oteplenie steny, dosadíme tento výsledok do (6.9.7) a nájdeme výsledok:

$$\vartheta_{av} = -\frac{\sigma_u \ell^2}{6\lambda} + \sigma_u \ell \frac{\left(R_{T,\ell} + \frac{\ell}{2\lambda}\right) \left(R_{T,0} + \frac{\ell}{2\lambda}\right)}{R_{T,0} + R_{T,\ell} + \frac{\ell}{\lambda}} \quad (6.9.14)$$

Úloha 6.9.1 Palivová tyč v jadrových reaktoroch má polomer $R = 4,5$ mm. Uvoľňované teplo je z jej povrchu odvádzané vodou, ktorá má priemernú teplotu $\vartheta = 300$ °C a priemernú rýchlosť $v = 3,34$ m. s⁻¹. Koeficient prestupu tepla z tyče do kvapaliny je v tomto prípade približne $\alpha = 3 \times 10^4$ W . m⁻² .

K^{-1} . V intervale teplôt $200\text{ }^\circ\text{C} < \vartheta < 700\text{ }^\circ\text{C}$ je závislosť tepelnej vodivosti paliva od teploty približne lineárna, pričom $\lambda(200\text{ }^\circ\text{C}) \approx 6\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a $\lambda(700\text{ }^\circ\text{C}) \approx 3,4\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Lineárny výkon palivovej tyče v typickom prevádzkovom režime je $P = 110\text{ W/cm}$.

(a) Nájdite priemernú a maximálnu teplotu v palivovej tyči za predpokladu, že tepelná vodivosť je konštantná, zodpovedajúca priemernej teplote paliva a radiálny profil generovaného tepla v tyči je konštantný.

(b) Vyriešte túto úlohu uvážením teplotnej závislosti tepelnej vodivosti: uvažujte pomocnú funkciu

$$\Lambda(\vartheta) = \int_{\vartheta_{\text{ref}}}^{\vartheta} \lambda(\vartheta') d\vartheta'$$

a nájdite jej explicitný tvar, ak $\lambda(\vartheta)$ je lineárna funkcia.

Ukážte, že vo všeobecnosti pre zloženú funkciu $\tilde{\Lambda}(r) = \Lambda(\vartheta(r))$ platí

$$\frac{d}{dr} \tilde{\Lambda}(r) = \lambda(\vartheta(r)) \frac{d}{dr} \vartheta(r)$$

Potom sa presvečte, že rovnicu vedenia tepla s premenlivou tepelnou vodivosťou (6.1.1) možno pretransformovať do tvaru

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \tilde{\Lambda}(r) \right) = \sigma_u$$

Priamou integráciou nájdite funkciu $\tilde{\Lambda}(r)$ a nakoniec jej kombináciou s vonkajšou funkciou $\Lambda(\vartheta)$ nájdite teplotný profil $\vartheta(r)$ aj v tomto prípade.

(c) Postupným rozpadom paliva sa mení radiálny profil generovaného tepla, pričom jeho hodnota je tým menšia, čím sa palivo nachádza bližšie k osi tyče. Nájdite teplotný profil v prípade, keď radiálny profil generovaného tepla modelujeme funkciou

$$\sigma_u(r) = a \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Konštantu a určte z lineárneho výkonu palivovej tyče.

Úloha 6.9.2 Nájdite oteplenie povrchu elektrického vodiča vedúceho ku rýchlovarnej kanvici s príkonom 1800 W . Predpokladajte, že vodič má jadro z troch medených vodičov, každý s prierezom $0,75\text{ mm}^2$ a PVC izolácie. Vonkajší polomer vodiča je 6 mm . Sústavu nahradte cylindrickým modelom s jediným efektívnym medeným vodičom, ktorého prierez sa rovná súčtu prierezu jednotlivých vodičov a predpokladajte, že Joulove straty sú v medi homogénne rozložené. Tepelná vodivosť PVC izolácie je $\lambda_{\text{PVC}} = 0,19\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,

potrebné vlastnosti medi nájdete v tabuľke 5.1 a koeficient prestupu tepla z povrchu vodiča je $\alpha \approx 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

- (1) Vypočítajte σ_u .
- (2) Vyjadrite hustotu toku tepla vstupujúci do PVC izolácie od vodičov.
- (3) Vyriešte rovnicu vedenia tepla v cylindrických súradniciach s uvážením valcovej symetrie pre závislosť teploty od radiálnej vzdialenosti od osi vodiča.
- (4) Na všeobecné riešenie použite Neumannovu okrajovú podmienku na vnútornom polomere izolácie a konvektívnu okrajovú podmienku na vonkajšom polomere izolovaného kábla.
- (5) Nájdite teplotu na povrchu izolácie vodiča.
- (6) Nájdite priebeh teploty v efektívnom medenom vodiči. Aká je jeho maximálna teplota?

Úloha 6.9.3 Uvažujte tieniacu stenu jadrového reaktora. Od reaktora dopadá na stenu žiarenie, ktorého hustota toku energie v stene pre absorpciu postupne klesá podľa vzťahu

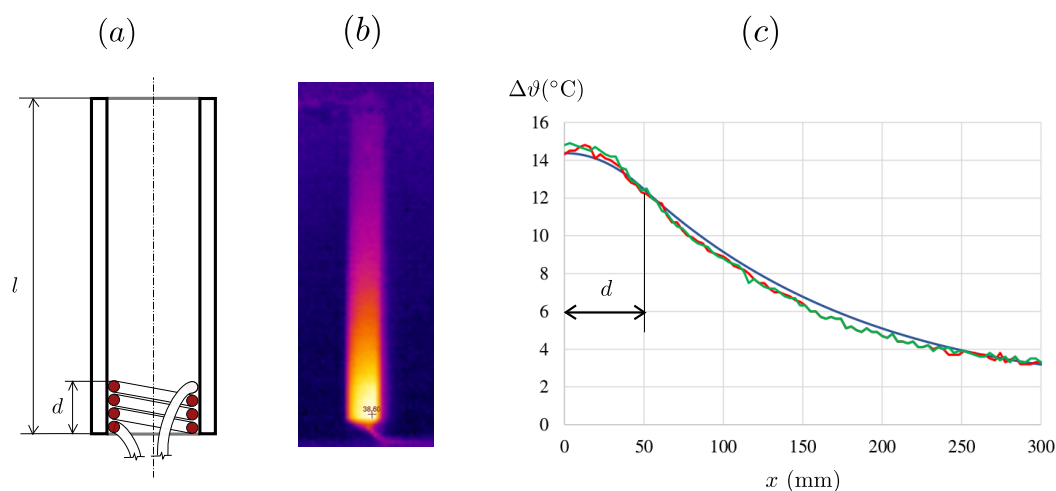
$$j_{\text{rad}}(x) = j_{\text{rad}}(0)e^{-ax}$$

- (1) Nájdite množstvo pohltenej energie žiarenia na jednotku objemu steny. Toto množstvo sa zrejme rovná produkcii vnútornej energie v stene.
- (2) Nájdite teplotný profil steny s hrúbkou L ak poznáte teplotu steny na strane reaktora ϑ_1 aj teplotu steny na druhej strane ϑ_2 .
- (3) Nájdite miesto, kde nadobúda teplota maximum a určte jeho hodnotu.

6.10 Kvázijednorozmerné úlohy

V tejto časti preberieme triedu úloh, ktoré môžu mať dvojrozmerný ($\vartheta(x,y)$) alebo aj trojrozmerný ($\vartheta(x,y,z)$) charakter, ale vďaka veľkému rozdielu medzi dĺžkovými škálami v smere x a ostatnými dvoma smermi, sú z praktického hľadiska jednorozmerné. Takéto úlohy nazývame kvázijednorozmerné a ich príkladmi sú rôzne chladiace alebo výhrevné tyče, chladiace rebrá a podobne. Konkrétny príklad, ktorý možno dobre opísať ako kvázijednorozmernú sústavu, predstavuje vyhrievaná trubica na obrázku 6.10.1. Vďaka rozdielu v dĺžkových škálach existuje jednoduchý spôsob opisu ich teplotného poľa. Kvázijednorozmernú sústavu opíšeme pomocou vhodne zavedenej priemernej teploty, pre ktorú dokážeme odvodiť efektívnu jednorozmernú rovnicu vedenia tepla.

Uvažujme chladiacu tyč z materiálu s vodivosťou λ a dĺžkou ℓ , ktorej jeden koniec je v kontakte s horúcim telesom s teplotou ϑ_0 . Tyč má vonkajší



Obr. 6.10.1: (a) Náčrt trubice, ktorá je na dĺžke d vyhrievaná odporovým vodičom. (b) Infračervená snímka demonštruje postupný pokles teploty v smere od vyhrievanej oblasti. (c) Porovnanie dvoch profilov oteplenia pozdĺž trubice získaných z termosnímkou (červená a zelená krivka) s kvázijednorozmerným analytickým modelom. V nevyhrievanej časti trubice vykazuje oteplenie charakteristický exponenciálny pokles určený parametrom δ zavedeným v rovnici 6.10.8.

obvod \mathcal{O} a cez svoj povrch odovzdáva teplo prostrediu s teplotou⁴ $\vartheta_\infty = 0$ a charakterizovaným koeficientom prestupu tepla α . Plochu prierezu tyče označíme S . Rovnica vedenia tepla v tyči má v stacionárnom režime tvar

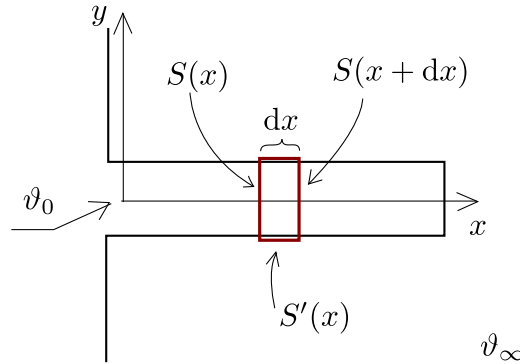
$$0 = -\nabla \cdot \vec{j}, \quad \vec{j} = -\lambda \nabla \vartheta. \quad (6.10.1)$$

V okolí pozície x na osi tyče budeme uvažovať uzavretú integračnú plochu $\Sigma(x)$, ktorá sa skladá z troch plôch (Obr. 6.10.2):

1. plocha $S(x)$ prierezu tyče na súradnici x , ktorej veľkosť je S ,
2. plocha $S(x + dx)$ ktorá je posunutím plochy $S(x)$ v smere osi x a
3. plocha $S'(x)$, ktorá je tvorená povrchom tyče medzi pozíciami x a $x + dx$. Jej veľkosť je $\mathcal{O}dx$.

Rovnicu vedenia tepla (6.10.1) preintegrujeme cez oblasť uzavretú plochu

⁴Pri tejto voľbe má teplota význam oteplenia voči prostrediu.



Obr. 6.10.2: Náčrt chladiacej tyče so zvýrazneným infinitezimálnym elementom s dĺžkou dx . Element je ohraničený uzavretou plochou $\Sigma(x)$, ktorá sa skladá z plôch $S(x)$, $S'(x)$ a $S(x + dx)$.

$\Sigma(x)$ a potom použijeme Gaussovu vetu na jej úpravu

$$0 = - \int_S dydz j_x(x, y, z) + \int_S dydz j_x(x + dx, y, z) + \int_{\partial dx} d\vec{S}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') \quad (6.10.2)$$

Prvé dva členy možno zlúčiť, ak použijeme Taylorov rozvoj pre hustotu toku tepla

$$j_x(x + dx, y, z) \approx j_x(x, y, z) + \frac{\partial j_x}{\partial x} dx,$$

pričom deriváciu hustoty toku možno z Fourierovho zákona vyjadriť pomocou samotnej teploty

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial \vartheta(\vec{r})}{\partial x} \right) = -\lambda \frac{\partial^2 \vartheta(\vec{r})}{\partial x^2}.$$

Tretí člen vyjadríme pomocou konvektívnej okrajovej podmienky na povrchu tyče

$$\vec{j}(\vec{r}')|_{S'} = \alpha \vartheta(\vec{r}')|_{S'} \vec{n}'.$$

Dosadením týchto úprav do rovnice (6.10.2) dostaneme

$$0 = -dx \lambda \frac{d^2}{dx^2} \int_S dydz \vartheta(\vec{r}) + \alpha \int_{\partial dx} \vartheta(\vec{r}') dS'. \quad (6.10.3)$$

Zavedieme si *priemernú teplotu v priereze* $S(x)$ na pozícii x :

$$\vartheta(x) = \frac{1}{S} \int_S dydz \vartheta(x, y, z) \quad (6.10.4)$$

a priemernú teplotu na povrchu $S'(x)$ na pozícii x :

$$\vartheta_{S'}(x) = \frac{1}{\mathcal{O}_{dx}} \int_{\mathcal{O}_{dx}} \vartheta(\vec{r}') dS' \quad (6.10.5)$$

Pre takto zavedené priemerné teploty rovnica (6.10.3) po predelení faktorom Sdx nadobudne tvar

$$0 = -\lambda \frac{d^2}{dx^2} \vartheta(x) + \frac{\mathcal{O}\alpha}{S} \vartheta_{S'}(x) \quad (6.10.6)$$

Na základe skúseností z riešenia teploty v stene alebo vo valcovej izolácii možno predpokladať, že dve priemerné teploty $\vartheta(x)$ a $\vartheta_{S'}(x)$ si budú navzájom úmerné, $\vartheta_{S'}(x) = k\vartheta(x)$ (pozri úlohu 6.10.3); ak zavedieme označenie $\alpha' = k\alpha$, tak nájdeme diferenciálnu rovnicu pre priemernú teplotu prierezu tyče,

$$0 = -\lambda \frac{d^2}{dx^2} \vartheta(x) + \frac{\mathcal{O}\alpha'}{S} \vartheta(x) \quad (6.10.7)$$

Táto rovnica má tvar rovnice vedenia tepla s efektívnou produkciou vnútornej energie $\sigma_u = \frac{\mathcal{O}\alpha'}{S} \vartheta(x)$. Tento výraz závisí od hľadanej teploty, a preto rovnica predstavuje homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami.

Všeobecné riešenie rovnice (6.10.7) hľadáme v tvare $\vartheta(x) = ae^{bx}$. Po jeho dosadení nájdeme

$$\vartheta(x) = a_+ e^{x/\delta} + a_- e^{-x/\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{S\lambda}{\mathcal{O}\alpha'}} \quad (6.10.8)$$

kde a_+ a a_- sú ľubovoľné konštanty.

Predpokladajme, že chladiaca tyč je veľmi dlhá; exponenciálne narastajúci člen potom nemôže spĺňať okrajovú podmienku na konci tyče, $\vartheta(\ell) \rightarrow 0$, a preto $a_+ = 0$. Druhá konštanta je určená z teploty horúceho telesa, s ktorým je tyč v kontakte $\vartheta(x=0) = \vartheta_0$. Teplota bude v chladiacej tyči teda exponenciálne klesať,

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \exp(-x/\delta) \quad (6.10.9)$$

Vzdialenosť, na ktorej poklesne teplota v tyči na ϑ_0/e je daná parametrom δ .

Príklad 6.10.1 Uvažujme jednu z mnohých hliníkových tyčíniek, ktoré sú súčasťou pasívneho chladienia procesora v PC. Koeficient prestupu tepla $\alpha \approx$

$5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$, tepelná vodivosť hliníka $\lambda = 200 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, polomer tyčky asi $r \sim 1 \text{ mm}$ a dĺžka $\ell \sim 50 \text{ mm}$ nájdeme

$$\delta = \sqrt{\frac{\pi r^2 \lambda}{2\pi r \alpha'}} \approx 14 \text{ cm} \quad (6.10.10)$$

Chladiace tyčinky sú teda navrhované oveľa kratšie ako je dĺžka poklesu teploty a môžeme predpokladať, že ich teplota je prakticky totožná s teplotou chladeného telesa.

Úloha 6.10.2 Odhadnite koeficient prestupu tepla α pre prirodzené prúdenie popri trubici z obrázku 6.10.1. Vieme, že trubica je z hliníka s koeficientom tepelnej vodivosti $\lambda = 200 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, vonkajší polomer trubice je 30 mm a hrúbka jej steny je 1 mm. Vnútorňý objem trubice je uzavretý, preto prestup tepla prostredníctvom vnútornej valcovej plochy môžeme v stacionárnom prípade zanedbať.

Uvažujte, že priebeh má exponenciálne klesajúci charakter pre $x \geq d$. Charakteristickú dĺžku δ odhadnite zo smernice pre nameranú závislosť oteplenia pre $x = d$ (Obr. 6.10.1c). Uvedomte si, že prierez kvázi1D sústavy je v tomto prípade len prierezová plocha steny trubice.

Úloha 6.10.3 Uvažujte valcovú tyč s polomerom R , v ktorej je konštantná hustota produkcie vnútornej energie – hustota Joulových strát σ_u . Tyč má koeficient tepelnej vodivosti λ a koeficient prestupu tepla zo svojho povrchu α . Ukážte, že pomer priemerného oteplenia v priereze a na povrchu tyče voči okoliu je daný vzťahom,

$$k = \frac{1}{1 + \frac{R\alpha}{4\lambda}}.$$

Určte hodnotu koeficientu k pre hliníkovú tyč s polomerom 1 mm chladenú prirodzeným prúdením ($\alpha \approx 5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$).

Výraz

$$\text{Bi} = \frac{R\alpha}{2\lambda}$$

predstavuje tzv. Biotovo číslo pre dlhú tyč a stretneme sa s ním v nasledujúcej kapitole.

Úloha 6.10.4 Ukážte, že pri použití okrajových podmienok $\vartheta(0) = \vartheta_0$ a $j_x(L) = \alpha\vartheta(L)$ bude mať riešenie vedenia tepla pozdĺž chladiacej tyče tvar

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \left(\frac{e^{-x/\delta}}{1 + \kappa e^{-2L/\delta}} + \frac{e^{x/\delta}}{1 + e^{2L/\delta}/\kappa} \right) \quad (6.10.11)$$

kde

$$\kappa = \frac{\frac{\lambda}{\alpha\delta} - 1}{\frac{\lambda}{\alpha\delta} + 1}.$$

Kapitola 7

Prechodné deje pri vedení tepla v tuhých látkach

Prechodné deje sa od stacionárneho vedenia tepla vyznačujú tým, že teplota sa pri nich v čase mení. Jednoduchým príkladom prechodného deja je chladnutie horúceho telesa alebo ohrev telesa z počiatočnej teploty na vyššiu. Cieľom štúdia prechodných dejov je vedieť predpovedať, ako dlho daný proces bude trvať, aj keď sú situácie keď môžu byť zaujímavé aj ďalšie otázky, napr. najvyššia dosiahnutá prechodná teplota v určitom mieste. Ako prvý bude vysvetlený prístup k približnému a jednoduchému opisu prechodného deja pomocou priemernej teploty, čo vedie na matematický model s obyčajnou diferenciálnou rovnicou prvého rádu. Pripomenieme si, ako takéto rovnice možno analyticky riešiť, či už priamou integráciou alebo pomocou Laplaceovej transformácie. V druhej polovici kapitoly ukážeme, ako možno pomocou Laplaceovej transformácie analyticky riešiť aj niektoré prechodné deje pre celé teplotné pole. K problematike prechodných či všeobecne nestacionárnych úloh vedenia tepla je zaujímavé si okrem štandardných učebníc [18, 20] prelistovať aj monografiu od Carslaw a Jaegera [21] s množstvom analyticky riešiteľných úloh rovnice vedenia tepla.

7.1 Opis priemernej teploty nehomogénneho telesa

V tejto kapitole nájdeme efektívny model pre opis priemernej teploty telesa a podmienky jeho platnosti. Vyjdeme z rovnice vedenia tepla v tuhom telese bez explicitného vyjadrenia hustoty toku tepla,

$$\rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}_Q + \sigma_u. \quad (7.1.1)$$

Hmotnostná tepelná kapacita je označená ako c , pričom nie je dôležité uvádzať index konštantného objemu, nakoľko teleso považujeme za nestlačiteľné. Predpokladajme, že tepelná kapacita aj hustota sú od teploty nezávislé veličiny. Môžu ale závisieť od priestorovej súradnice. Teleso môže byť zložené z viacerých častí a materiálov, ktoré sa v hodnotách hustoty a tepelnej kapacity líšia. *Priemernú teplotu telesa* $\vartheta_V(t)$ preto zadefinujeme tak, aby sme pomocou nej vedeli vyčísliť zmenu vnútornej energie celého telesa

$$\frac{dU}{dt} = \int_V dV \rho(\vec{r}) c(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial t} \vartheta(\vec{r}, t) = \left(\int_V dV \rho(\vec{r}) c(\vec{r}) \right) \frac{d}{dt} \vartheta_V(t) \quad (7.1.2)$$

t. j.

$$\vartheta_V(t) = \frac{\int_V dV \rho(\vec{r}) c(\vec{r}) \vartheta(\vec{r}, t)}{\int_V dV \rho(\vec{r}) c(\vec{r})}, \quad (7.1.3)$$

kde integrujeme cez celé študované teleso a V je jeho objem. Výraz v menovateli predstavuje celkovú tepelnú kapacitu telesa

$$C = \int_V dV \rho(\vec{r}) c(\vec{r}). \quad (7.1.4)$$

Rovnicu pre priemernú teplotu telesa nájdeme preintegrovaním rovnice vedenia tepla (7.1.1) cez jeho objem. Použitím Gaussovej vety pre člen obsahujúci hustotu toku tepla nájdeme

$$C \frac{d\vartheta_V}{dt} = - \oint d\vec{S} \cdot \vec{j}_Q + P. \quad (7.1.5)$$

P predstavuje nárast vnútornej energie telesa za jednotku času v dôsledku nevratných procesov, ako sú napríklad Joulove straty.

Vyčíslenie celkového toku tepla cez jeho povrch závisí od špecifickej situácie. Budeme uvažovať dva príspevky:

1. Teleso je na ploche S svojho povrchu v kontakte s prostredím so vzdialenou teplotou ϑ_∞ a tento kontakt je charakterizovaný koeficientom prestupu tepla α . Potom

$$- \int_S d\vec{S} \cdot \vec{j}_Q = -\alpha \int_S dS (\vartheta(\vec{r}, t) - \vartheta_\infty) = -\alpha S (\vartheta_S(t) - \vartheta_\infty), \quad (7.1.6)$$

kde sme zaviedli *priemernú teplotu na povrchu* telesa

$$\vartheta_S(t) = \frac{1}{S} \int_S dS \vartheta(\vec{r}, t). \quad (7.1.7)$$

2. Časťou povrchu s plochou S' vystupuje z telesa predpísaný tok $J(t)$.

Uvážením týchto možností nájdeme rovnicu

$$C \frac{d\vartheta_V}{dt} = -\alpha S(\vartheta_S(t) - \vartheta_\infty) - J + P, \quad (7.1.8)$$

ktorá obsahuje dve neznáme funkcie – priemernú teplotu telesa $\vartheta_V(t)$ a priemernú teplotu povrchu telesa v kontakte s prostredím $\vartheta_S(t)$. Rozdiel medzi týmito teplotami môžeme zanedbať, ak je ich rozdiel výrazne menší ako rozdiel medzi priemernou teplotou povrchu telesa a teploty okolia. V takomto prípade priemerná teplota telesa spĺňa rovnicu

$$C \frac{d\vartheta_V}{dt} = -\alpha S(\vartheta_V(t) - \vartheta_\infty) - J + P. \quad (7.1.9)$$

Táto rovnica predstavuje lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu s pravou stranou. Jej riešenie bude opísané v nasledujúcej časti.

Platnosť rovnice (7.1.9) je podmienená malým rozdielom medzi priemernou teplotou povrchu a objemu telesa. Tento predpoklad bude zrejme splnený, ak bude tepelná vodivosť telesa dostatočne veľká. Hustotu toku, danú Fourierovým zákonom $\vec{j}_Q = -\lambda \nabla \vartheta$, rádovo odhadneme ako rozdiel priemernej teploty v objeme a na povrchu telesa predelený s *charakteristickým dĺžkovým rozmerom telesa* ℓ ,

$$j_Q \sim \lambda \frac{\vartheta_V - \vartheta_S}{\ell} \quad (7.1.10)$$

Pri povrchu telesa v kontakte s prostredím by táto hustota toku mala byť zhodná s hustotou toku tepla cez povrch S ,

$$\lambda \frac{\vartheta_V - \vartheta_S}{\ell} = \alpha(\vartheta_S - \vartheta_\infty) \quad (7.1.11)$$

Aby platilo $|\vartheta_V - \vartheta_S| \ll |\vartheta_S - \vartheta_\infty|$, musí byť splnená podmienka

$$|\vartheta_V - \vartheta_S| \ll \frac{\lambda}{\alpha \ell} |\vartheta_V - \vartheta_S| \rightarrow \text{Bi} = \frac{\alpha \ell}{\lambda} \ll 1, \quad (7.1.12)$$

kde Bi je bezrozmerná konštanta, tzv. *Biotovo číslo*¹. Nevyhnutná podmienka pre platnosť rovnice (7.1.9) je *kritérium* $\text{Bi} \ll 1$.

Rovnica (7.1.9) v prípade $\alpha = 0$, keď je vyššie uvedená nerovnosť triviálne splnená pre ľubovoľnú hodnotu λ , platí pre priemernú hodnotu teploty telesa pre ľubovoľnú funkciu toku tepla $J(t)$.

¹Jean-Baptiste Biot, francúzsky fyzik a matematik, s ktorého menom ste sa už stretli v Biotovom–Savartovom zákone v magnetizme.

Príklad 7.1.1 Charakteristický rozmer telesa nie je veľmi presne definovaný pojem. V technickej literatúre sa ℓ zavádza vzťahom

$$\ell = \frac{V}{S},$$

kde V je objem telesa a S veľkosť povrchu, na ktorom je teleso v kontakte s prostredím. Pre guľu s polomerom R máme napríklad

$$\ell = \frac{R}{3}.$$

Príklad 7.1.2 Možno opísať chladnutie horúcej tehly na vzduchu len pomocou jej priemernej teploty? Rozmery tehly sú $400 \times 100 \times 200$ mm a koeficient tepelnej vodivosti $\lambda = 1,5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. Odvod tepla z povrchu tehly je charakterizovaný koeficientom prestupu tepla $\alpha \approx 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$. (Táto hodnota zahŕňa príspevok od prirodzeného prúdenia a aj linearizovaný príspevok od jej tepeného žiarenia.)

Riešenie: Charakteristický rozmer tehly bude

$$\ell = \frac{abc}{2(ab + bc + ac)} \approx 30 \text{ mm}$$

Nájďme podmienku pre charakteristický rozmer z Biotovho kritéria

$$\text{Bi} = \frac{\alpha \ell}{\lambda} \ll 1 \rightarrow \ell \ll \frac{\lambda}{\alpha} = 150 \text{ mm}$$

Tehla s charakteristickou dĺžkou okolo 30 mm túto nerovnosť spĺňa, a preto očakávame, že jej chladnutie možno opísať pomocou exponenciálneho poklesu jej priemernej teploty.

Príklad 7.1.3 Pre telesá, ktoré majú niekoľko výrazne odlišných priestorových škál, jedno Biotovo kritérium nie je postačujúce. Napríklad, pre dlhý valec s výškou L a polomerom $R \ll L$, použitím definície z príkladu 7.1.1, nájdeme jediný charakteristický rozmer

$$\ell = \frac{\pi R^2 L}{2\pi RL + 2\pi R^2} \approx \frac{R}{2}. \quad (7.1.13)$$

Na druhej strane, zo stacionárneho riešenia teploty v chladiacej tyči (s dĺžkou L) vieme, že aj keď je teplota na povrchu a v objeme na danom mieste dĺžky tyče rovnaká, t. j. je splnené $\text{Bi}_\ell \ll 1$, teplota sa mení po jej dĺžke podľa

vztahu (6.10.11). Túto závislosť môžeme považovať za približne konštantnú iba ak $\vartheta(0) \approx \vartheta(L)$, čo je ekvivaletné podmienke

$$1 \gg \frac{L^2}{\delta^2} = L^2 \frac{2\alpha}{R\lambda} = L^2 \frac{\alpha}{\ell\lambda}. \quad (7.1.14)$$

Posledný výraz možno napísať pomocou „druhého“ Biotovho čísla pre tyč s použitím „druhého“ charakteristického rozmeru $\xi = L^2/\ell$,

$$\text{Bi}_\xi = \frac{\xi\alpha}{\lambda} \ll 1. \quad (7.1.15)$$

To, že existujú dve rôzne priestorové škály priamo súvisí s tým, že sú potrebné dve kritériá – z konštant vystupujúcich v probléme vieme totiž vyrobiť dve nezávislé bezrozmerné čísla.

7.2 Riešenie prechodného deja – chladnutie

V tejto časti vyriešime rovnicu (7.1.9) pre chladnutie telesa. Pri chladnutí telesa nedodávame žiaden stratový výkon, ani nevynucujeme tok tepla cez časť jeho hraničnej plochy, a preto $J = P = 0$. Diferenciála rovnica opisujúca chladnutie nadobudne teda tvar

$$C \frac{d\vartheta_V}{dt} = -\alpha S (\vartheta_V(t) - \vartheta_\infty). \quad (7.2.1)$$

K rovnici musíme pridať počiatočnú podmienku na teplotu v počiatočnom čase, $\vartheta_V(0) = \vartheta_0 > \vartheta_\infty$. Riešenie by sme mohli zjednodušiť tradičnou voľbou $\vartheta_\infty = 0$, no z pedagogických dôvodov to tentokrát nespravíme.

V prvom kroku nájdeme riešenie *homogénnej* rovnice ²

$$C \frac{df}{dt} = -\alpha S f(t), \quad (7.2.2)$$

ktoré hľadáme v tvare $f(t) = ae^{bt}$; dosadením nájdeme

$$Cabe^{bt} = -\alpha Sae^{bt} \Rightarrow b = -\frac{\alpha S}{C}, \quad (7.2.3)$$

pričom konštanta a môže byť ľubovoľná. Zavedieme označenie *relaxačného času* $\tau = \frac{C}{\alpha S}$.

²Pripomeňme, že rovnica je homogénna, ak má triviálne riešenie, t. j. $f(t) = 0$ je riešením.

V druhom kroku hľadáme jedno *partikulárne* riešenie rovnice s pravou stranou metódou *variácie konštanty* a , t. j. predpokladáme že $f_p(t) = a(t)e^{-t/\tau}$,

$$-C\frac{1}{\tau}a(t)e^{-t/\tau} + Ce^{-t/\tau}\frac{da}{dt} = -\alpha S(a(t)e^{-t/\tau} - \vartheta_\infty) \quad (7.2.4)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{\tau}\vartheta_\infty e^{t/\tau} \Big| \int_0^t dt \quad (7.2.5)$$

$$a(t) = \vartheta_\infty(e^{t/\tau} - 1), \quad (7.2.6)$$

a teda partikulárne riešenie bude

$$f_p(t) = \vartheta_\infty(1 - e^{-t/\tau}). \quad (7.2.7)$$

Všeobecné riešenie rovnice (7.2.1) je súčtom všeobecného riešenia homogénnej rovnice a jedného partikulárneho riešenia,

$$\vartheta_V(t) = ae^{-t/\tau} + \vartheta_\infty(1 - e^{-t/\tau}). \quad (7.2.8)$$

Integračnú konštantu a nájdeme z počiatočnej podmienky pre priemernú teplotu,

$$\vartheta_0 = ae^0 + \vartheta_\infty(1 - e^0) \Rightarrow a = \vartheta_0, \quad (7.2.9)$$

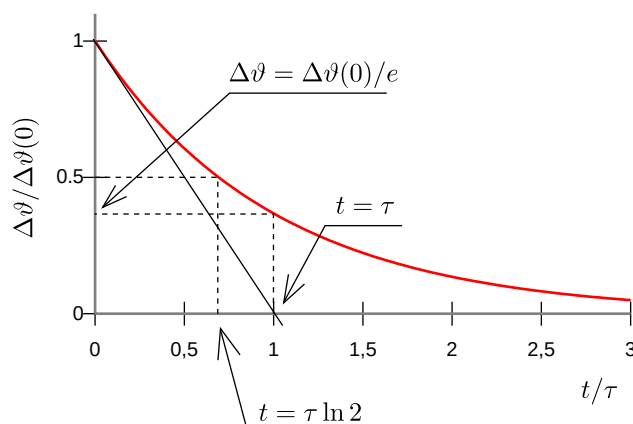
a teda riešenie je

$$\vartheta_V(t) = (\vartheta_0 - \vartheta_\infty)e^{-t/\tau} + \vartheta_\infty. \quad (7.2.10)$$

Nájdenný priebeh teploty predstavuje klesajúcu exponenciálu (Obr. 7.2.1); relaxačný čas τ určuje, za aký čas poklesne rozdiel priemernej teploty telesa voči okoliu na $1/e$ -násobok svojej počiatočnej hodnoty, resp. za časový interval $T_{1/2} = \tau \ln 2$ poklesne tento rozdiel na polovicu. Pre veľké hodnoty času t bude teplota telesa vyrovnaná s okolím tak, ako by sme očakávali.

Príklad 7.2.1 V hrnci z nerezovej ocele s hmotnosťou 0,7 kg (aj s pokrievkou), s priemerom podstavy 155 mm a výškou 90 mm sme nechali 0,8 kg teplej vody. Hrnec sme položili na drevenú podložku a nepriedušne prikryli kovovou pokrievkou. Oteplenie nádoby voči okoliu pokleslo na polovicu za 2,5 hodiny.

Odhadnite hodnotu koeficientu prestupu tepla pre hrniec s pokrievkou. Uvážte, že kovová stena (dobrý tepelný vodič) hrnca je prakticky rovnako teplá ako voda v hrnci. Merná tepelná kapacita vody je $c_{p,\text{aq}} = 4200 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ a ocele, z ktorej je hrniec, je $c_{p,\text{steel}} = 500 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$. Odvod tepla drevenou podložkou zanedbajte.



Obr. 7.2.1: Priebeh relatívneho oteplenia telesa voči okoliu $\Delta\vartheta_V(t) = (\vartheta_V(t) - \vartheta_\infty)/(\vartheta_V(0) - \vartheta_\infty)$ pri jeho chladnutí. V čase $t = \tau \ln 2$ klesne jeho hodnota na polovicu voči počiatkovej situácii; v čase $t = \tau$ poklesne na $1/e$ – násobok. Ak by sme predpokladali, že oteplenie bude klesať v čase rovnomere takou rýchlosťou, ako v počiatkovom momente, teleso by nadobudlo teplotu okolia presne v čase $t = \tau$, ako naznačuje dotyčnica ku krivke ochladzovania.

Riešenie: Rozdiel priemernej teploty vody (a hrnca) voči okoliu klesá exponenciálne,

$$\Delta\vartheta_V(t) = \Delta\vartheta_V(0)e^{-t/\tau}. \quad (7.2.11)$$

V čase $t = T_{1/2}$ klesne tento rozdiel na polovicu, t. j.

$$\frac{1}{2}\Delta\vartheta_V(0) = \Delta\vartheta_V(0)e^{-T_{1/2}/\tau}, \quad (7.2.12)$$

z čoho nájdeme $T_{1/2} = \tau \ln 2$. Nakoľko $\tau = C/(S\alpha)$, môžeme vyjadriť koeficient prestupu tepla

$$\alpha = \frac{C \ln 2}{ST_{1/2}}. \quad (7.2.13)$$

Určíme najprv celkovú tepelnú kapacitu sústavy vody a hrnca. Podľa (7.1.4),

$$C = \rho_1 V_1 c_{p,1} + \rho_2 V_2 c_{p,2} = m_1 c_{p,1} + m_2 c_{p,2} \quad (7.2.14)$$

$$= 0,7 \cdot 500 + 0,8 \cdot 4200 = 3710 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \quad (7.2.15)$$

Celkovú plochu rozhrania medzi vzduchom a hrncom nájdeme z jeho rozmerov³,

$$S = \pi R^2 + 2\pi Rh = \pi R(R + h) = 0,041 \text{ m}^2. \quad (7.2.16)$$

Po dosadení dostaneme koeficient prestupu tepla (pre prirodzené prúdenie pozdĺž steny hrnca) približne $\alpha \approx 7 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$.

Na overenie, či možno považovať priemernú teplotu na povrchu zhodnú s priemernou teplotou celej sústavy, vyčíslime Biotovo číslo. Charakteristický rozmer vody v hrnci bude

$$\ell = \frac{V}{S} = \frac{0,8 \times 10^{-3}}{0,041} \approx 0,02 \text{ m} \quad (7.2.17)$$

Tepelná vodivosť vody je asi $\lambda = 0,6 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, takže

$$\text{Bi} = \frac{\alpha \ell}{\lambda} \approx 0,23 < 1, \quad (7.2.18)$$

t. j. kritérium je marginálne splnené. Samotný hrniec sme neuvažovali, má oveľa vyššiu tepelnú vodivosť ako voda. V realite bude voda v hrnci aj trochu prúdiť, prestup tepla v nej bude realizovaný aj konvektívne, a to efektívne navýši jej tepelnú vodivosť. Biotovo kritérium tak bude lepšie splnené.

Úloha 7.2.2 Ukážte, že chladnutie telesa je matematicky ekvivaletné vybíjaniu kondenzátora s kapacitou C cez rezistor $R = 1/(\alpha S)$, pričom teplota okolia je reprezentovaná napätím na jednej strane kondenzátora (zem) a priemerná teplota telesa predstavuje napätie na druhej strane kondenzátora.

7.3 Ohrievanie telesa

Prepokladajme, že do času $t = 0$ malo teleso rovnakú teplotu ako jeho okolie, ϑ_∞ . V čase $t = 0$ zapneme konštantný prúd vodičom, ktorý je zabudovaný do telesa, čím mu budeme zvyšovať vnútornú energiu, $P > 0$. Ako bude vyzeráť priebeh priemernej teploty ako funkcie času? Na akej hodnote sa ustáli priemerná teplota telesa, ak sa vôbec ustáli?

Na zodpovedanie týchto otázok musíme riešiť rovnicu (7.1.9) pre $J = 0$ a s počiatočnou podmienkou $\vartheta(0) = \vartheta_\infty$. Nakoľko postup je analogický riešeniu problému chladnutia, uvedieme priamo výsledok,

$$\vartheta_V(t) = (\vartheta_\infty - \vartheta_s)e^{-t/\tau} + \vartheta_s \quad (7.3.1)$$

³Nezarátavame plochu dna hrnca, lebo sa nachádza na drevenej, dobre izolovanej podložke. Tok tepla cez dno je zanedbateľný.

K) a hmotnosť všetkého medeného vinutia je 251 kg s $c_p = 390 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$. Celkový povrch chladiacich rebier nádoby je asi 25 m^2 . Koeficient prestupu tepla pre prirodzené prúdnie pozdĺž chladiacich rebier je $5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$.

Úloha 7.3.3 Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice ohrievania telesa (7.1.9) s $J = 0$ a počiatočnou podmienkou $\vartheta(0) = \vartheta_\infty$ metódou variácie konštanty.

7.4 Riešenie diferenciálnej rovnice Laplaceovou transformáciou

V prípade, že dodávaný výkon do telesa je funkciou času, tiež možno riešiť rovnicu pre priemernú teplotou metódou variácie konštanty. V matematickej fyzike (pozri napr. [21]) tento postup vedie na *Greenovu funkciu*, pomocou ktorej možno vyjadriť partikulárne riešenie pre ľubovoľnú zadanú funkciu $P(t)$ v tvare

$$\vartheta_p(t) = \int_0^\infty dt' G(t-t')P(t'), \quad G(t-t') = \frac{1}{C} e^{-(t-t')/\tau} 1(t-t'), \quad (7.4.1)$$

kde $1(t-t')$ je Heavisideova funkcia jednotkového kroku. Tento výsledok možno priamo získať aj metódou variácie konštanty.

V technike sa pri analyticky riešiteľných úlohách vedenia tepla viac ako Greenove funkcie používa Laplaceova transformácia a to aj v úlohách, kde sa rieši aj priestorová závislosť teplotného pola pri prechodných javoch. Nakoľko tento postup použijeme v ďalšej kapitole, pripomenieme si, ako používame Laplaceovu transformáciu na riešenie obyčajnej diferenciálnej rovnice. Laplaceovu transformáciu zapisujeme v tvare

$$f(t) \rightarrow \tilde{f}(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt. \quad (7.4.2)$$

p je označenie Laplaceovej premennej, nahradzujúcej čas t po transformácii.

V prvom kroku použijeme Laplaceovu transformáciu na pravú aj ľavú stranu pôvodnej rovnice⁴,

$$C(p\tilde{f}(p) - \vartheta_0) = -\alpha S(\tilde{f}(p) - \frac{\vartheta_\infty}{p}) + \tilde{P}(p). \quad (7.4.3)$$

⁴Pomocou tabuliek, napr. http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/Laplace_Table.aspx.

Úpravou nájdeme výsledok pre obraz,

$$\tilde{f}(p) = \frac{\vartheta_0 + \vartheta_\infty/(p\tau) + \tilde{P}(p)/C}{p + 1/\tau}. \quad (7.4.4)$$

V poslednom kroku vyhladáme spätnú transformáciu pomocou úprav a tabuliek. Prvé dva členy v čitateli rozložíme

$$\frac{\vartheta_0}{p + 1/\tau} + \frac{\tau\vartheta_\infty}{\tau p} + \frac{-\vartheta_\infty}{p + 1/\tau} \quad (7.4.5)$$

a každý samostatne pretransformujeme naspäť,

$$\vartheta_0 e^{-t/\tau} + \vartheta_\infty - \vartheta_\infty e^{-t/\tau}. \quad (7.4.6)$$

Toto predstavuje všeobecné riešenie rovnice chladnutia telesa (7.2.10), ktoré sme našli aj pomocou metódy variácie konštanty. Posledný člen v (7.4.4) možno pomocou *konvolúcie* transformovať na partikulárne riešenie uvedené v rovnici (7.4.1). Aj pomocou Laplaceovej rovnice nakoniec nachádzame všeobecné riešenie rovnice pre priemernú teplotu telesa,

$$\vartheta_V(t) = (\vartheta_0 - \vartheta_\infty)e^{-t/\tau} + \vartheta_\infty + \frac{1}{C} \int_0^t dt' e^{-(t-t')/\tau} P(t'). \quad (7.4.7)$$

7.5 Nestacionárne teplotné pole

V niektorých geometricky jednoduchších úlohách možno použiť Laplaceovu transformáciu na získanie analytických výsledkov pre teplotné pole ako funkciu času a jednej priestorovej premennej [21]. Ukážeme jeden príklad, ktorý vytvorí predstavu, čo takéto riešenie rovníc obnáša.

Uvažujme 1D úlohu vedenia tepla v polonekonečnej stene, pričom okrajovou podmienkou bude predpísaný konštantný tok tepla j_0 v $x = 0$. Počiatočná podmienka nech je konštantná teplota v celej stene. Túto teplotu zvolíme rovnú nule. Keďže ide o polonekonečnú oblasť, od riešenia očakávame, že teplota v nekonečne ostane nulová. Toto predstavuje druhú okrajovú podmienku. Musíme teda riešiť úlohu

$$\frac{\partial}{\partial t} \vartheta(x,t) = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vartheta(x,t), \quad (7.5.1)$$

$$\vartheta(t, x \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad - \left. \frac{\partial}{\partial x} \vartheta(x,t) \right|_{x=0} = \frac{j_0}{\lambda} \quad (7.5.2)$$

s počiatočnou podmienkou

$$\vartheta(0, x) = 0. \quad (7.5.3)$$

Z prvej rovnice vidno, že riešenie bude závisieť len od *difuzivity* $\nu_D = \lambda/(\rho c)$, ktorá charakterizuje rýchlosť zmien tepelných nehomogenít v látke. Tepelná vodivosť vystupuje aj v Neumannovej okrajovej podmienke, no tu len v kombinácii s predpísanou hustotou toku tepla – ich pomer predstavuje druhý parameter, od ktorého bude riešenie úlohy závisieť.

Laplaceov obraz rovnice a okrajových podmienok bude

$$p\tilde{\vartheta}(x,p) = \nu_D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{\vartheta}(x,p), \quad (7.5.4)$$

$$\tilde{\vartheta}(p, x \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad - \left. \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\vartheta}(x,p) \right|_{x=0} = \frac{j_0}{\lambda} \frac{1}{p}. \quad (7.5.5)$$

Riešenie podobnej rovnice sme už raz našli pri úlohe chladiacej tyče. Preto priamo napíšeme výsledok

$$\tilde{\vartheta}(x,p) = c_1 e^{-x/\delta(p)} + c_2 e^{x/\delta(p)}, \quad \delta(p) = \sqrt{\frac{\nu_D}{p}}. \quad (7.5.6)$$

Konštantu c_2 pri exponenciálne narastajúcom člene musíme položiť rovnú nule, aby bola splnená okrajová podmienka pre $x \rightarrow \infty$. Z okrajovej podmienky pre $x = 0$ nájdeme

$$\frac{1}{\delta(p)} c_1 = \frac{j_0}{\lambda} \frac{1}{p} \Rightarrow c_1 = \frac{j_0}{\lambda} \frac{\delta(p)}{p}. \quad (7.5.7)$$

Výsledný Laplaceov obraz riešenia teda nadobúda tvar

$$\tilde{\vartheta}(p,x) = \frac{j_0}{\lambda} \frac{\sqrt{\nu_D}}{p^{3/2}} \exp\left(-\sqrt{\frac{p}{\nu_D}} x\right). \quad (7.5.8)$$

Pre nájdenie spätnej transformácie použijeme vzťah⁵ [21]

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^{3/2}} e^{-x\sqrt{p}} \right\} = 2\sqrt{t} \operatorname{ierfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \quad (7.5.9)$$

v ktorom vystupuje integrál z komplementárnej error funkcie

$$\operatorname{ierfc}(z) = \int_z^\infty \operatorname{erfc}(y) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} - z \operatorname{erfc}(z). \quad (7.5.10)$$

⁵Uvedený vzťah možno dvojnásobným derivovaním podľa z previesť na úlohu hľadania spätneho obrazu funkcie $\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \exp(-z\sqrt{p})$, ktorému zodpovedá funkcia $f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-z^2/(4t)}$, predstavujúca relatívne známe partikulárne riešenie rovnice vedenia tepla v bezrozmerných jednotkách na nekonečnej oblasti $z \in (-\infty, \infty)$.

Samotná komplementárna error funkcia je definovaná vzťahom

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-y^2} dy. \quad (7.5.11)$$

Využitím týchto vzťahov nájdeme

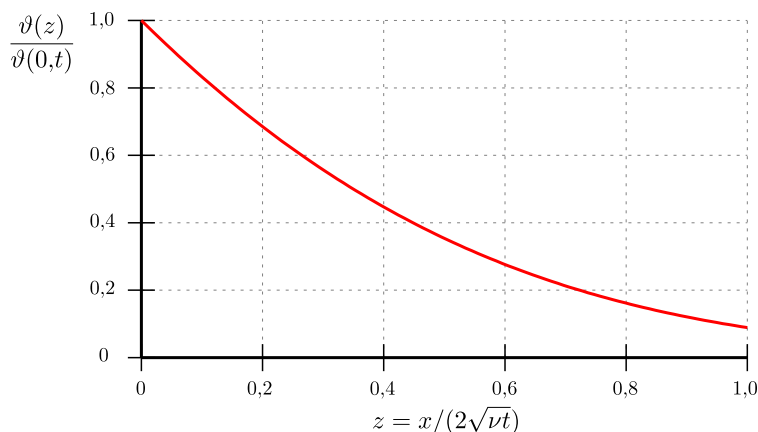
$$\vartheta(x,t) = \frac{2j_0}{\lambda} \sqrt{\nu_D t} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4\nu_D t)} - \frac{x}{2\sqrt{\nu_D t}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\nu_D t}}\right) \right]. \quad (7.5.12)$$

Fitovanie tohto vzťahu na experimentálne dáta teplotnej odozvy možno použiť pre presné merania difuzivity a teda aj tepelnej vodivosti látok [22].

Z rovnice 7.5.12 tiež vyplýva, že na povrchu vzorky, pre $x = 0$, bude teplota narastať úmerne odmocnине času,

$$\vartheta(x=0,t) = \frac{2j_0}{\lambda} \sqrt{\frac{\nu_D t}{\pi}}. \quad (7.5.13)$$

Vidíme, že oteplenie bude neohraničene rásť, čo je samozrejme len akademickou zaujímavosťou. V realite po dosiahnutí určitej hodnoty oteplenia nebude možné udržiavať nemennú hustotu toku tepla vstupujúceho do vzorky a pôvodne riešený matematický model je nevyhnutné zmeniť.



Obr. 7.5.1: Priebeh normalizovaného oteplenia polonekonečnej vzorky v dôsledku konštantného tepelného toku vstupujúceho na jej povrchu v $x = 0$. Pre dané miesto $x > 0$ bude oteplenie pre narastajúci čas t dané hodnotami z blížiacimi sa k $z = 0$.

Pomocou priebehu oteplenia na povrchu možno všeobecné riešenie, funkciu dvoch premenných x a t , zapísať len pomocou jedinej bezrozmernej

premennej $z = x/(2\sqrt{\nu_D t})$,

$$\frac{\vartheta(z)}{\vartheta(x=0,t)} = e^{-z^2} - \sqrt{\pi}z \operatorname{erfc}(z) = \sqrt{\pi} \operatorname{ierfc}(z). \quad (7.5.14)$$

Priebeh tejto funkcie, z ktorého možno získať predstavu o časovom vývoji teplotného poľa, je ukázaný na Obr. 7.5.1.

Úloha 7.5.1 (1) Nájdite prechodný dej ohrievania polonekonečného telesa pre Dirichletovu okrajovú podmienku $\vartheta(x=0,t) = \vartheta_0$ a nulovú počiatočnú podmienku $\vartheta(x,t=0) = 0$. (2) Zobraďte priebeh zavedením podobných bezrozmerných premenných ako na obrázku 7.5.1. (3) Ako nájdeme čas, v ktorom bude teplota v hĺbke látky $x = h$ nadobúdať 90% teploty na okraji?

Pri riešení použite spätnú Laplaceovu transformáciu

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} e^{-x\sqrt{p}} \right\} = \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right)$$

Riešenie: $t_{0.9}(h) \approx \frac{1}{\nu_D} \left(\frac{h}{0.2} \right)^2$

Kapitola 8

Prestup tepla v tekutinách

V tekutinách sa teplo šíri nie len *kondukciou*, opísanou Fourierovým zákonom, ale aj *konvekciou* – makroskopickým pohybom látky. Základom matematického opisu prestupu tepla v tekutinách sú tri parciálne diferenciálne rovnice: (1) pohybová rovnica tekutiny predstavujúca rovnicu pre rýchlostné pole látky, (2) rovnica vedenia tepla, ktorá predstavuje rovnicu pre teplotné pole a (3) rovnica spojitosti pre hustotu hmotnosti. V kapitole sa oboznámime s niekoľkými analytickými výsledkami stacionárneho prestupu tepla v tekutinách platných pri laminárnom prúde. V priebehu výkladu sa postupne zavedú viaceré bezrozmerné čísla ako je Reynoldsovo, Prandtlovo, Nusseltovo či Rayleighovo číslo, pomocou ktorých sú formulované výsledky pre kvantitatívny opis prestupu tepla vo forme kritériálnych rovníc. Nadobudnuté skúsenosti s diferenciálnymi rovnicami prestupu tepla v tekutinách predstavuje dôležitý základ na ich úspešné numerické riešenie a interpretovanie výsledkov pomocou rôznych voľne šíriteľných alebo komerčných programov. Rozsiahlejší výklad kvantitatívneho opisu prestupu tepla s veľkým množstvom rôznych geometrií a zodpovedajúcich kritériálnych rovníc možno nájsť v učebniciach Holmana [18] alebo Incropera a kol. [20].

8.1 Základné rovnice a pojmy

Rovnice opisujúce rýchlostné a teplotné pole v látke sme získali z formulácie zákonov nerovnovážnej termodynamiky pre spojité prostredie v kapitole 5:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (\eta \nabla \vec{v}) + \nabla (\eta' \nabla \cdot \vec{v}) + \rho \vec{g}, \quad (8.1.1)$$

$$\rho c_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T \right) - \frac{T\beta}{\rho\kappa} \frac{d\rho}{dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \sigma_{u,N}, \quad (8.1.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}). \quad (8.1.3)$$

Na výpočet troch neznámych polí $\vec{v}(\vec{r}, t)$, $T(\vec{r}, t)$ a $\rho(\vec{r}, t)$ je potrebné dodať k týmto rovniciam vhodné okrajové a počiatočné podmienky, podobne ako to bolo v prípade jednoduchších úloh vedenia tepla v tuhej látke v kapitolách 6 a 7. Pohybová rovnica tekutín aj rovnica vedenia tepla sú prvého rádu vzhľadom na čas, *počiatočnými podmienkami* pre vývoj polí v čase predstavuje zadanie rýchlostného a teplotného poľa a poľa hustoty v každom mieste uvažovanej tekutiny v počiatočnom čase, $\vec{v}(\vec{r}, t_0)$, $T(\vec{r}, t_0)$ a $\rho(\vec{r}, t_0)$.

Najbežnejšie typy *okrajových podmienok* pre rovnicu vedenia tepla boli uvedené v kapitole 6. Na okraji oblasti riešenia prúdenia sa najčastejšie stretávame s Dirichletovou okrajovou podmienkou pre rýchlosť. Ako sme videli v časti venovanej interpretácii viskozity (5.4), v prípade rozhrania s pevnou látkou musí byť tangenciálna a prirodzene aj normálová zložka rýchlosti prúdenia totožná s (predpísanou) rýchlosťou rozhrania. V prípade voľnej hladiny kvapaliny alebo polonekonečných oblastí riešenia sa stretávame aj s Neumannovou okrajovou podmienkou na vektor rýchlosti, ktorá má fyzikálny význam nulovej zložky tangenciálnych viskózných síl (zložiek viskózneho tenzora).

V prípade prítoku (odtoku) tekutiny do (zo) študovanej oblasti špecifikujeme okrajovú podmienku na rýchlostné pole tekutiny alebo rozdiel tlaku na vstupe a výstupe. V takom prípade hovoríme o *vynútenom prúdení*, nakoľko jeho tok je vynútený vonkajšími okolnosťami prostredníctvom okrajovej podmienky. V realite takejto situácii zodpovedá napríklad prúdenie udržiavané čerpadlom alebo kompresorom.

O *prírodzenom prúdení* hovoríme vtedy, ak je prúdenie tekutiny poháňané kombináciou gravitácie a nehomogénneho teplotného poľa. Fyzikálny mechanizmus prirodzeného prúdenia súvisí s teplotnou rozpínavosťou tekutín. V nami uvedenej formulácii rovníc (8.1.1–8.1.3) je rozpínavosť opísaná závislosťou rovnovážneho tlaku od stavových veličín $p(\rho, T)$, resp. nenulovou hodnotou koeficientu teplotnej rozpínavosti β . V dôsledku teplotnej rozpínavosti bude hustota tekutiny s vyššou teplotou nižšia ako hustota chladnejšej tekutiny, čo prostredníctvom gravitačného pôsobenia zabezpečeného členom $\rho \vec{g}$ v (8.1.1) vedie na lokálne prítomnú nenulovú hustotu vztlakovej sily.

Okrem rovnovážneho tlaku sa môže ukazovať dôležitým uvážiť aj závislosti všetkých ostatných materiálových parametrov η , η' , c_V , κ , λ od stavových veličín ρ a T .

Pri malých rýchlostiach prúdenia tekutín v ich toku pozorujeme pomerne usporiadanú a jednoduchú štruktúru *prúdnic* – kriviek, ktorých tangenciálne vektory majú rovnaký smer ako vektor rýchlosti tekutiny v danom mieste. Prúdnic hladko opisujú aj prípadné hranice, pozdĺž ktorých tekutina prúdi. Takéto prúdenie nazývame *laminárne prúdenie*.

Pri vysokých rýchlostiach dochádza ku kvalitatívnej zmene štruktúry prúdnic, neexistencii stacionárnych tokov a zdanlivo náhodnému vzniku a zániku vírov na väčších aj menších priestorových a časových škálach. Takéto prúdenie nazývame *turbulentným*. Turbulencia je dôsledkom existencie nelineárneho člena $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$ v pohybovej rovnici tekutín.

V turbulentnom režime sa stretávame len s nestacionárnym rýchlostným poľom. V mnohých prakticky dôležitých situáciách môžeme napriek tomu hovoriť o *ustálenom* prúdení. V takomto prípade priemerné hodnoty rýchlostného poľa, vypočítané váženým ustrednením na určitej časovej škále τ ,

$$\langle \vec{v}(\vec{r}) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g((t-t')/\tau) \vec{v}(\vec{r}, t') \frac{dt'}{\tau}, \quad (8.1.4)$$

nezávisia od času t . Váhovacia funkcia $g(x)$ nemá presne stanovený tvar, no musí mať konečný rozsah a byť integrovateľná,

$$g(x) = 0 \text{ pre } |x| > 1, \text{ a } \int g(x) dx = 1. \quad (8.1.5)$$

Na oboznámenie sa so základnými javmi konvekcie tepla pri vynútenom prúdení potrubím alebo prirodzeným prúdením popri vertikálnej stene budeme považovať takmer všetky materiálové parametre za konštantné. Študovať budeme len stacionárny alebo ustálený stav, tekutiny budeme považovať za nestlačiteľné a zanedbáme aj produkciu vnútornej energie v tekutine. V takomto prípade sa rovnice (8.1.1)–(8.1.3) zjednodušia na tvar

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}, \quad (8.1.6)$$

$$\rho c_V \vec{v} \cdot \nabla T = \lambda \nabla^2 T, \quad (8.1.7)$$

$$0 = \nabla \cdot \vec{v}. \quad (8.1.8)$$

Nasledujúce príklady a úlohy vychádzajú z riešenia príkladu 5.5.2 prúdenia tekutiny medzi dvoma stacionárnymi platňami a ponúkajú prvé oboznámenie sa tak s analytickými ako aj numerickými úlohami prestupu tepla v tekutinách.

Príklad 8.1.1 Predstavme si, že spodná doska z príkladu 5.5.2 má v sebe homogénny zdroj tepla, a preto na jej rozhraní vstupuje do kvapaliny konštantná hustota toku tepla j_Q . Nájdite stacionárne teplotné pole v kvapaline.
Riešenie: Pri riešení tohto príkladu si zvolíme súradnicu x v smere rýchlosti prúdenia kvapaliny, súradnicu z kolmo na dosky, pričom jej počiatok

bude na rozhraní spodnej dosky a kvapaliny a súradnica y bude kolmá na smer prúdenia kvapaliny a rovnobežná s doskami. Označenie osí z a y je teda vymenené oproti príkladu 5.5.2. Uvážením tohto rozdielu pre riešenie dostávame, že rýchlostné pole má nenulovú len zložku v smere osí x a jeho priebeh je $\vec{v}(\vec{r}) = v_x(z)\vec{i}$. Zo symetrie problému môžeme usúdiť, že teplota nebude závisieť od premennej y . Stacionárna rovnica vedenia tepla v kvapaline nadobudne tvar

$$\frac{4v_{\max}}{h^2}z(h-z)\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda}{\rho c_V} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Kombinácia parametrov na pravej strane sa nazýva difuzivita, $\nu_D = \lambda/\rho c_V$, a stretli sme sa s ňou pri riešení prechodných dejov pri vedení tepla v časti 7.5. Táto rovnica nie je vo všeobecnosti separovateľná, ale možno nájsť jedno špeciálne riešenie v tvare $T(x,z) = ax + f(z)$. Dosadením do rovnice nájdeme

$$Kz(h-z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad K = \frac{4v_{\max}a}{\nu_D h^2}.$$

Priamym integrovaním dostaneme

$$T(x,z) = ax + \frac{Kz^3}{12}(2h-z) + bz + c.$$

Neurčité konštanty a, b a c nájdeme z okrajových podmienok. Nakoľko sme takto našli len jedno špeciálne riešenie pomocou uhádnutého tvaru, aj okrajové podmienky nebudú môcť byť ľubovoľné. V prvom rade, na dole platni je predpísaná hustota toku tepla j_Q

$$j_Q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = -\lambda b \Rightarrow b = -\frac{j_Q}{\lambda}.$$

Tok tepla do hornej platni bude

$$j_Q(z=h) = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=h} = -\lambda \frac{Kh^3}{6} + j_Q.$$

Ak je horná platňa tepelne izolovaná od okolia, musí byť tento tok nulový, čo vedie na vzťah pre konštantu a

$$K = \frac{6j_Q}{\lambda h^3} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \frac{j_Q \nu_D}{\lambda v_{\max} h}.$$

Poslednú konštantu c určíme z teploty vstupujúcej kvapaliny pre $x = 0$. Z nájdeneho riešenia vidíme, že teplotný profil na vstupe nie je konštantný, ale daný predpisom

$$T(x=0,z) = \frac{Kz^3}{12}(2h-z) - \frac{j_Q}{\lambda}z + c.$$

Konštantou c teda dokážeme špecifikovať len priemernú teplotu vstupujúcej kvapaliny.

Priemernú teplotu kvapaliny¹ na pozícii x definujeme tak, aby sme pomocou nej dokázali jednoducho spočítať tok energie zahŕňajúci hustotu toku entalpie (4.3.7)

$$J_h = \int \rho h \vec{v} \cdot d\vec{S} = L \int_0^h \rho c_p T(z) v_x(z) dz = L h \rho c_p T_{av} v_{av},$$

kde v_{av} je taká priemerná rýchlosť, pomocou ktorej ľahko spočítame tok hmotnosti kvapaliny (pozri aj príklad 2.2.1)

$$J_m = L \int_0^h \rho v_x(z) dz = L h \rho v_{av}.$$

Po mierne náročnejšom integrovaní a úprave zlomkov nájdeme

$$v_{av} = \frac{1}{h} \int_0^h v_x(z) dz = \frac{2}{3} v_{max}$$

a

$$T_{av}(x=0) = \frac{1}{h v_{av}} \int_0^h v_x(z) T(z) dz = -\frac{13}{35} \frac{j_Q h}{\lambda} + c.$$

Výsledný teplotný profil má teda tvar

$$T(x, z) = \frac{3}{2} \frac{j_Q \nu_D}{\lambda v_{max} h} x + \frac{j_Q}{\lambda h^3} \frac{z^3}{2} (2h - z) - \frac{j_Q}{\lambda} z + \frac{13}{35} \frac{j_Q h}{\lambda} + T_{av}(x=0).$$

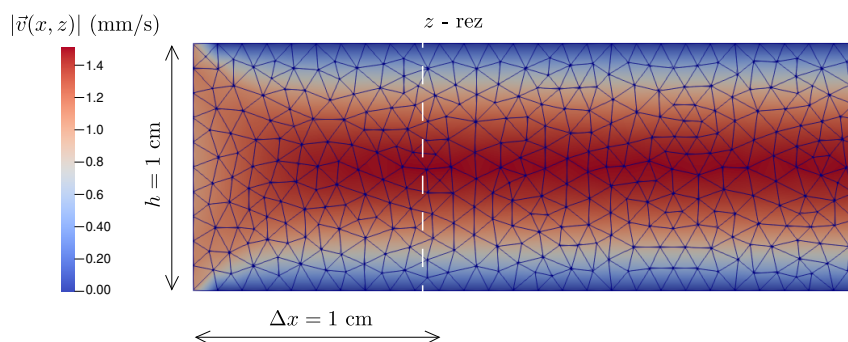
Pre úplnosť uvedme, že podľa výsledku príkladu 5.5.2 treba vyjadriť maximálnu rýchlosť pomocou zadaných parametrov

$$v_{max} = \frac{\Delta p}{8 \eta \ell h^2}.$$

Úloha 8.1.2 Odhadnite, o koľko stupňov sa ohreje voda v dôsledku vlastného viskózneho trenia, ak prúdi medzi dvoma nepohyblivými platňami priemernou rýchlosťou $v_{av} = 1$ m/s na dĺžke 1 m. Vzdialenosť platní nech je $h = 1$ cm, viskozita vody pri izbovej teplote je $\eta = 1$ mPa · s, hmotnostná tepelná kapacita vody je $c = 4200$ J/(kg · K)

Návod: (1) Využite tvar rýchlostného profilu z príkladu 5.5.2, (2) Spočítajte celkové teplo dodané vode na dĺžke ℓ za jednotku času $\dot{Q} = \int \dot{q} dV$ podobne

¹Takáto priemerná teplota sa nazýva aj teplota premiešanej kvapaliny, ktorej fyzikálna interpretácia je diskutovaná aj v časti 8.6.



Obr. 8.1.1: Velkosť rýchlosti prúdenia kvapaliny v blízkosti vstupu medzi dve horizontálne platne. Rýchlostný profil sa zmení z konštantnej hodnoty rýchlosti (vľavo, $x = 0$) na parabolický na relatívne krátkej vzdialenosti. Na obrázku sú zobrazené aj veľkosti použitých trojuholníkových elementov.

ako v príklade 5.6.1, s medzivýsledkom $\dot{Q} = L\ell\eta \int_0^h \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 dz$, (3) Spočítajte množstvo vody, ktorá prejde potrubím za jednotku času, $\frac{dm}{dt} = \rho v_{av} S$, (4) Množstvo vody z (3) muselo absorbovať množstvo tepla z (2), a preto jeho oteplenie nájdete pomocou hmotnostnej tepelnej kapacity vody, t. j. z bilancie $\dot{Q} = \frac{dm}{dt} c \Delta T$, kde ΔT je priemerné oteplenie vody po prechode vzdialenosti 1 meter medzi platňami.

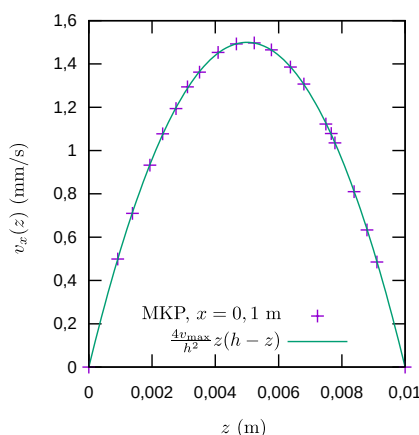
Príklad 8.1.3 Prestup tepla medzi paralelnými platňami: analytické a numerické výsledky. Cieľom tohto príkladu je porovnanie analytických vzťahov odvodených v príkladoch 5.5.2 a 8.1.1 s ich numerickým výpočtom spraveným metódou konečných prvkov pomocou programu Elmer [23].

Numerický výpočet vyžaduje konkrétnu voľbu materiálových a geometrických parametrov úlohy. Ich hodnoty sú uvedené v tabuľke 8.1. Na rozdiel od analytickej formulácie je v numerickom výpočte použitá jednoduchšia

ρ (g/cm ³)	c_p (kJ/(kg.K))	λ (W/(m.K))	h (mm)	ℓ (m)	d (m)
1,0	4,2	0,55	10,0	1,0	0,2

Tabuľka 8.1: Materiálové a geometrické parametre použité pre MKP simuláciu prúdenia a prestupu tepla medzi dvoma horizontálnymi platňami.

konštantná okrajová podmienka pre vstupnú rýchlosť, $v_x(x=0, z) = v_{av} = 1,0$ mm/s. Podobne, teplota na vstupe je predpísaná ako konštanta (nula) a na výstupe je predpísaný nulový konduktívny tok tepla. Aby sme vedeli zmysluplne porovnať nájdené vzťahy s takto zadanými okrajovými podmienkami, je teplo z dolnej platne dodávané kvapaline konštantnou hustotou toku $j_Q = 100$ W/m² len na dĺžke ℓ , pre $x \in (d, d + \ell)$. Pridaná počiatočná a koncová dĺžka prúdenia d slúži na sformovanie parabolického rýchlostného profilu za vstupom a teplotného profilu pred výstupom.

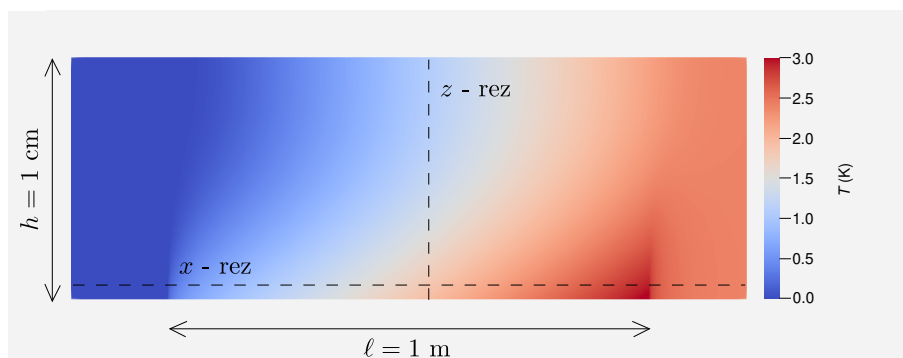


Obr. 8.1.2: Analyticky vypočítaný parabolický profil rýchlosti je zhodný s numerickými dátami pre $x > 1$ cm. Tu prezentované numerické hodnoty x -ovej zložky rýchlosti zodpovedajú $x = 10$ cm.

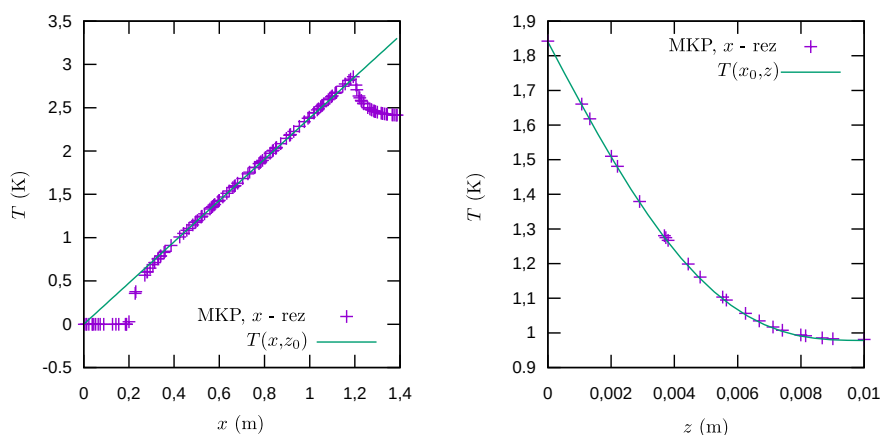
Ako prvé porovnáme riešenie pre rýchlostné pole. Veľkosť rýchlosti kvapaliny tesne za vstupom medzi platne je zobrazená na obrázku 8.1.1. Vidno, že na pomerne krátkej vzdialenosti, $\Delta x_v \sim 0,25$ cm sa rýchlostný profil stabilizuje. Jeho tvar je zhodný s analytickým výsledkom z príkladu 5.5.2, čo je ukázané na priebehu x -ovej zložky rýchlosti pozdĺž rezu v smere osi z na obrázku 8.1.2.

Na obrázku 8.1.3 je zobrazené teplotné pole. Je dôležité uvedomiť si diametrálne odlišnú mierku v x -ovom a z -ovom smere. Oblasť, v rámci ktorej z dolnej platne vstupuje do kvapaliny teplo, je ľahko identifikovateľná a nachádza sa na zobrazenej dĺžke ℓ . Pre lepšie porozumenie charakteru teplotného poľa a jeho porovnanie s analytickými výsledkami sú na obrázku 8.1.4 ukázané grafy teploty pozdĺž dvoch rezov indikovaných na obrázku 8.1.3.

Rez pozdĺž x -ovej osi ukazuje, že analytické riešenie správne opisuje rýchlosť nárastu teploty v dôsledku prestupu tepla zo spodnej platne až po prekonaní určitej vzdialenosti $\Delta x_T \sim 0,1$ m. Potom je aj teplotný profil v smere



Obr. 8.1.3: Teplotné pole kvapaliny prúdiacej medzi dvoma paralelnými platňami. Zo spodnej platne je na vzdialenosti ℓ do kvapaliny dodávané teplo konštantnou hustotou toku j_Q . Mierky pre vertikálne a horizontálne vzdialenosti sú diametrálne odlišné, aby bolo možné prezentovať celé teplotné pole.



Obr. 8.1.4: Rez teplotným poľom prúdiacej kvapaliny v smere x -ovej (vľavo) a z -ovej (vpravo) osi. V centrálnej oblasti je numerické riešenie zhodné s analytickými výsledkami.

osi z zhodný s analyticky nájdeným výsledkom.

8.2 Koeficient prestupu tepla

Konvektívny odvod tepla medzi tuhou látkou a kvapalinou charakterizujeme koeficientom prestupu tepla, ktorý je definovaný vzťahom

$$\alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{j}_Q}{\vartheta(\vec{r}) - \vartheta_{\text{ref}}} = -\frac{\lambda \vec{n} \cdot \nabla \vartheta(\vec{r})}{\vartheta(\vec{r}) - \vartheta_{\text{ref}}}, \quad (8.2.1)$$

kde $\vec{r} \in S$ je polohový vektor miesta na rozhraní medzi kvapalinou a tuhou látkou, \vec{n} je normála plochy rozhrania v tomto mieste orientovaná smerom od tuhej látky do kvapaliny a teplota ϑ_{ref} predstavuje vhodne zavedenú referenčnú teplotu kvapaliny, napríklad teploty kvapaliny vo veľkej vzdialenosti od povrchu alebo priemernú teplotu kvapaliny tečúcej potrubím, na danej dĺžkovej pozícii potrubia. Teplotné pole vystupujúce v čitateli pod gradientom a v menovateli definičnej rovnice je výsledkom riešenia Navierovej–Stokesovej rovnice v kvapaline a rovníc vedenia tepla v kvapaline aj tuhej látke, a preto vo všeobecnosti očakávame, že koeficient prestupu tepla α môže závisieť od miesta \vec{r} , t. j. $\alpha = \alpha(\vec{r})$. Preto vo všeobecnosti bude mať vzťah medzi hustotou toku tepla a lokálnym oteplením tvar

$$-\lambda \vec{n} \cdot \nabla \vartheta(\vec{r}) = \alpha(\vec{r})(\vartheta(\vec{r}) - \vartheta_{\text{ref}}), \quad \vec{r} \in S. \quad (8.2.2)$$

Pre praktickú charakterizáciu konvekcie na rozhraní kvapalnej a tuhej látky sa zavádza *priemerné oteplenie povrchu*

$$\Delta \vartheta_S = \langle \vartheta(\vec{r}) - \vartheta_{\text{ref}} \rangle \quad (8.2.3)$$

a *priemerná hustota toku tepla cez rozhranie alebo aj povrchové zaťaženie*

$$j_{Q,S} = \langle -\lambda \vec{n} \cdot \nabla \vartheta(\vec{r}) \rangle, \quad (8.2.4)$$

kde v oboch vzťahoch predstavuje označenie

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{S} \int_S \dots dS \quad (8.2.5)$$

výpočet priemernej hodnoty veličiny na ploche rozhrania.

Medzi priemerným oteplením a priemernou hustotou toku pre prípustnú závislosť koeficientu prestupu tepla od miesta neexistuje všeobecný jednoduchý vzťah úmernosti, ktorý sme predpokladali pri zavedení konvektívnej okrajovej podmienky v podkapitole 6.2. Našťastie, v dvoch prakticky užitočných prípadoch takýto vzťah existuje.

V prvom rade uvažujme prípad, keď je teplota na celom rozhraní tuhej a kvapalnej látky konštantná. Napríklad, ak je povrch kov s vysokou tepelnou

vodivosťou a prestupuje teplo z kovu do kvapaliny, bude tento predpoklad typicky dobre splnený. V tomto prípade bude platiť $\vartheta(\vec{r}) - \vartheta_{\text{ref}} = \Delta\vartheta_S$ aj bez prevedenia spriemerovania. Preintegrovaním rovnice (8.2.2) cez celý povrch rozhrania a ďalším jej predelením s jeho veľkosťou S preto dostaneme vzťah

$$j_{Q,S} = \Delta\vartheta_S \bar{\alpha}_\vartheta, \quad \bar{\alpha}_\vartheta = \langle \alpha(\vec{r}) \rangle, \quad (8.2.6)$$

ktorý definuje priemerný koeficient prestupu tepla *pri konštantnej teplote povrchu* rozhrania.

Druhý prípad nastáva, ak je hustota toku tepla cez celé uvažované rozhranie konštantná. Takáto situácia približne zodpovedá homogénemu dodávaniu tepla napr. pri homogénom vyhrievaní cez povrch špirály odporového vodiča. V tomto prípade bude platiť $-\lambda \vec{n} \cdot \nabla \vartheta(\vec{r}) = j_{Q,S}$ aj bez prevedenia spriemerovania. Predelením rovnice (8.2.2) s $\alpha(\vec{r})$ a až potom jej preintegrovaním cez celý povrch rozhrania a nakoniec jej predelením s veľkosťou rozhrania S dostaneme vzťah

$$j_{Q,S} \frac{1}{\bar{\alpha}_j} = \Delta\vartheta_S, \quad \frac{1}{\bar{\alpha}_j} = \left\langle \frac{1}{\alpha(\vec{r})} \right\rangle. \quad (8.2.7)$$

Formálne teda v oboch prípadoch platí vzťah jednoduchej lineárnej úmernosti medzi priemerným oteplením a povrchovým zaťažením,

$$\Delta\vartheta_S = \bar{\alpha}_j j_{Q,S} \quad (8.2.8)$$

no pre jednu a druhú situáciu môže byť priemerný koeficient prestupu tepla odlišný.

Príklad 8.2.1 Nájdite hodnotu lokálneho koeficientu prestupu tepla medzi homogénne vyhrievanou horizontálnou platňou a kvapalinou, ktorá popri nej laminárne prúdi. Vychádzajte z výsledkov príkladu 8.1.1. Ako referenčnú si zvolte teplotu premiešanej kvapaliny medzi platňami.

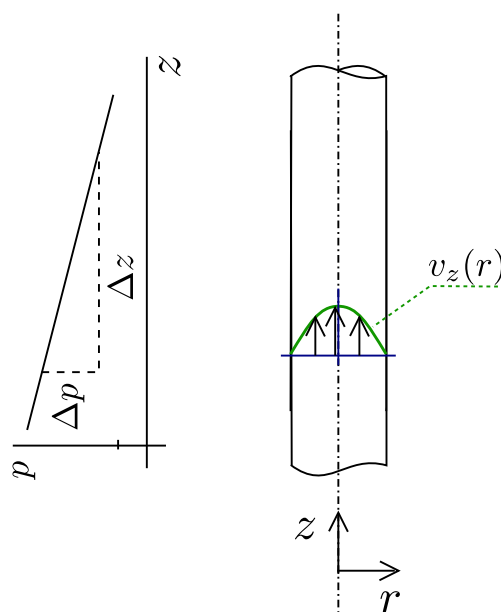
Riešenie:

$$\alpha(x) = \frac{j_Q}{T(x, z=0) - T_{\text{av}}(x)} = \frac{j_Q}{\frac{13}{35} \frac{j_Q h}{\lambda}} = \frac{35}{13} \frac{\lambda}{h}.$$

V tomto prípade koeficient prestupu tepla nezávisí od polohy na rozhraní medzi platňou a kvapalinou.

Úloha 8.2.2 Nech lokálny koeficient prestupu tepla vertikálneho potrubia výšky ℓ závisí od vertikálnej súradnice z podľa vzťahu

$$\alpha(z) = c\sqrt{z} \quad (8.2.9)$$



Obr. 8.3.1: Potrubie, ktorým preteká kvapalina vertikálnym smerom nahor a paralelné zobrazenie závislosti tlaku od výšky. Rozdiel tlakov Δp musí byť dostatočný na prekonanie gravitačnej a viskózneho sily pôsobiacej na kvapalinu.

kde c je kladná reálna konštanta. (a) Nájdite výraz pre $\bar{\alpha}_j$ a $\bar{\alpha}_\theta$ a presvedčte sa, že sa tieto dve hodnoty líšia. (b) Ako sa zmení situácia, ak bude lokálny koeficient prestupu tepla konštantný, tak ako je to v prípade laminárneho prúdenia s konštantnou hustotou toku tepla? (c) Aký fyzikálny rozmer musí mať konštanta c ?

8.3 Prúdenie vo valcovom potrubí

Stacionárne prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny cylindrickým potrubím malými rýchlosťami predstavuje analyticky riešiteľný, no zároveň aj prakticky dôležitý prípad. Vychádzať budeme zo stacionárnej Navierovej–Stokesovej rovnice pre prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny vo vertikálnom potrubí,

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}. \quad (8.3.1)$$

Úlohu budeme riešiť v cylindrických súradniciach r, z, ϕ . Jednotkové vektory v smere narastania jednotlivých súradníc v mieste r, z, ϕ budeme zapisovať

ako \vec{e}_r, \vec{e}_z a \vec{e}_ϕ . Pri používaní diferenciálnych operátorov na vektorové funkcie v krivočiarych súradniciach treba byť obozretný – jednotkové vektory \vec{e}_r a \vec{e}_ϕ menia totiž svoj smer pri zmene pozície,

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_\phi = -\vec{e}_r \text{ a } \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_r = \vec{e}_\phi. \quad (8.3.2)$$

Pre vertikálne potrubie platí $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Obmedzíme sa len na takýto prípad, lebo potom zo symetrie úlohy môžeme predpokladať, že riešenie nebude závisieť od ϕ .

Pri malých rýchlostiach predpokladáme existenciu laminárneho toku, a preto bude mať rýchlosť smer len pozdĺž osi potrubia. Z rovnice kontinuity pre hustotu nestlačiteľnej kvapaliny potom vyplýva

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (8.3.3)$$

a preto v_z môže byť funkciou len radiálnej premennej r , $v_z(r)$. Ľavá strana rovnice (8.3.1) je pri týchto okolnostiach nulová:

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = v_z \vec{e}_z \cdot \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{e}_z v_z = 0. \quad (8.3.4)$$

Laplaceov operátor pôsobiaci na vektorové pole na jej pravej strane v cylindrických súradniciach je:

$$\nabla^2 \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z(r) \vec{e}_z = \vec{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} v_z(r). \quad (8.3.5)$$

Z pôvodne vektorovej rovnice (8.3.1) nájdeme rovnice pre konkrétne zložky skalárnym násobením s jednotkovými vektormi.

Po prenasobení s \vec{e}_z :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_z}{\partial r} - \rho g. \quad (8.3.6)$$

Po prenasobení s \vec{e}_r :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r}. \quad (8.3.7)$$

Týmto sme sformulovali sústavu dvoch diferenciálnych rovníc pre dve neznáme funkcie $v_z(r, z)$ a $p(r, z)$. Priamou integráciou rovnice (8.3.7) nájdeme

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \rightarrow p(r, z) = p(z), \quad (8.3.8)$$

t. j. tlak môže závisieť len od z .

Rovnicu (8.3.6) prepíšeme takto:

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_z}{\partial r} - \rho g. \quad (8.3.9)$$

Ľavá strana závisí len od premennej z a pravá strana len od premennej r a napriek tomu sa musia rovnať pre ľubovoľné miesto (z, r) kde sa nachádza prúdiaca kvapalina. Jediná možnosť, ako to zabezpečiť je, že obe strany tejto rovnice sa rovnajú od r aj z nezávislej konštanty c_0 ,

$$\frac{\partial p(z)}{\partial z} = c_0 \text{ a zároveň } c_0 = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial v_z}{\partial r} - \rho g. \quad (8.3.10)$$

Obe rovnice sú jednoduché a možno ich vyriešiť priamym integrovaním:

$$p(z) = c_0 z + c_1, \quad (8.3.11)$$

$$v_z(r) = \frac{c_0 + \rho g}{4\eta} r^2 + c_2 \ln(r) + c_3. \quad (8.3.12)$$

Okrajové podmienky určujú integračné konštanty. Pri tlaku nájdeme, že c_1 má význam tlaku v $z = 0$ a c_0 má význam poklesu tlaku na jednotkovej vzdialenosti, t. j. $c_0 = -\Delta p / \Delta z$. Pre rýchlosť požadujeme nulovú rýchlosť pri stene potrubia, $v_z(R) = 0$ a podmienku, aby riešenie bolo v $r = 0$ konečné, t. j. $c_2 = 0$. Dosadením a upravením nájdeme riešenia:

$$p(z) = p_0 - \frac{\Delta p}{\Delta z} z \quad (8.3.13)$$

$$v_z(r) = \frac{\Delta p / \Delta z - \rho g}{4\eta R^2} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (8.3.14)$$

Maximálna rýchlosť prúdenia je v strede potrubia

$$v_{\max} = \frac{\Delta p / \Delta z - \rho g}{4\eta} R^2. \quad (8.3.15)$$

Nájdene riešenie pre tok v potrubí sa nazýva *Poiseuilleov tok*. Predstavuje presné riešenie tejto úlohy, no ukazuje sa, že pre väčšie rýchlosti sa stáva *nestabilným*, t. j. ľubovoľne malá fluktuácia v rýchlostnom poli od striktny symetrického charakteru, napr.

$$\vec{v}(r, z, \phi) = v_z(r) \vec{e}_z \rightarrow \vec{v}(r, z, \phi) = v_z(r) \vec{e}_z + \delta \vec{v}(r, z) \quad (8.3.16)$$

začne nekontrolovateľne narastať a *stabilným riešením* sa stane nesymetrický tok. Stretávame sa tu so zaujímavým fenoménom *spontánneho narušenia*

symetrie – pôvodne cylindricky symetrické potrubie (aj spolu s prípadným gravitačným poľom v smere osi potrubia) má stabilné nesymetrické riešenie.

Pri ešte vyššej rýchlosti sa aj takéto nesymetrické riešenie stáva nestabilným a tok sa mení na turbulentný. Pre turbulentný tok neexistuje stacionárne riešenie, no vhodným ustrednením dynamických polí možno identifikovať ustálené riešenie, ako to bolo diskutované v úvodnej podkapitole 8.1.

Úloha 8.3.1 Rovnica (8.3.6) opisuje aj prúdenie kvapaliny v medzivalcovom priestore, v smere osí valcov. Toto je dobrý model prúdenia chladiacej kvapaliny okolo jadrových palivových tabletiiek. Takisto možno využiť všeobecné riešenie (8.3.12), pričom vzhľadom na vysoký pokles tlaku s dĺžkou v dôsledku viskozity možno gravitačné zrýchlenie v týchto vzťahoch zanedbať. Vychádzajúc z tohto všeobecného riešenia nájdite rýchlostný profil pre nulové okrajové podmienky na povrchoch valcových plôch, t. j. $v_z(r = R_1) = v_z(r = R_2) = 0$.

Úloha 8.3.2 Couettov tok v rotačnom viskozimetri. (a) Nájdite rovnicu pre rýchlostné pole kvapaliny v rotačnom viskozimetri. Predpokladajte, že rýchlostné pole bude mať nenulovú zložku rýchlosti len v tangenciálnom smere, a že bude závisieť len od vzdialenosti od rotačnej osi, t. j. $v_\phi(r)$. (b) Priamou integráciou nájdite jej riešenie pri použití okrajových podmienok $v_\phi(R_1) = v_1$ a $v_\phi(R_2) = 0$. (c) Nájdite silu, ktorou pôsobí kvapalina na otáčajúci sa valec integráciou viskózneho tenzora cez povrch vnútorného valca. (d) Ukážte, že v prípade tenkej štrbiny, $R_2 - R_1 \ll R_1$, sa nájdené riešenie zhoduje s približným riešením z úlohy 5.5.1.

Pomôcka: Pre (a):

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = v_\phi \vec{e}_\phi \cdot \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_\phi(r) \vec{e}_\phi \quad (8.3.17)$$

$$= v_\phi \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \vec{e}_\phi = \frac{v_\phi^2}{r} (-\vec{e}_r) \quad (8.3.18)$$

$$\nabla^2 \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_\phi(r) \vec{e}_\phi \quad (8.3.19)$$

$$= \vec{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} v_\phi(r) + \frac{v_\phi(r)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \vec{e}_\phi \quad (8.3.20)$$

$$= \vec{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} v_\phi(r) + \frac{v_\phi(r)}{r^2} (-\vec{e}_\phi) \quad (8.3.21)$$

Pre (b): Hľadajte riešenie v tvare

$$v_\phi(r) = \frac{c_0}{r} + c_1 r \quad (8.3.22)$$

Pre (c):

$$F_t = \int_{S_1} d\vec{S} \cdot \vec{\sigma} = \int_{S_1} dS_r \sigma_{r,\phi} = \int_{S_1} dr 2\pi r \eta \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \quad (8.3.23)$$

8.4 Pokles tlaku v potrubí

Výsledok pre maximálnu rýchlosť prúdenia v potrubí, rovnicu (8.3.15), možno prepísať do tvaru

$$\Delta p = \rho h \Delta z + \frac{4\eta v_{\max}}{R^2} \Delta z. \quad (8.4.1)$$

Pokles tlaku v tomto výraze má dva príspevky:² (1) príspevok v dôsledku hydrostatického tlaku $\rho g \Delta z$ pri náraste výšky Δz a (2) príspevok v dôsledku viskózneho prúdenia na dĺžke Δz .

Poiseuillov tok možno považovať za dobré priblíženie aj pre opis prúdenia v horizontálnom potrubí, pri ktorom možno zanedbať vplyv gravitačného pôsobenia a jediným významným príspevkom je pokles v dôsledku viskozity. Jednou z podmienok takéhoto zanedbania je $D \ll \ell$, kde D je priemer potrubia a ℓ jeho uvažovaná horizontálna dĺžka. Výsledný vzťah pre pokles tlaku v dlhom horizontálnom potrubí je dôležitý pre návrh hydraulických sústav kvapalín a plynov. Fenomenologicky je pokles tlaku v potrubí opísaný *Darcyho–Weisbachovým vzťahom*

$$\Delta p = f_D \xi \frac{1}{2} \rho v_{\text{av}}^2, \quad (8.4.2)$$

v ktorom $\xi = \ell/D$ je pomer rozmerov potrubia, $\frac{1}{2} \rho v_{\text{av}}^2$ je člen pripomínajúci hustotu kinetickej energie tekutiny vyjadrenej pomocou priemernej rýchlosti prúdenia (definovanej prostredníctvom toku hmotnosti) a f_D je bezrozmerný *koeficient trenia*. Takto zvolený tvar je motivovaný experimentálnymi pozorovaniami – v dostatočne širokom intervale rýchlostí platí, že pokles tlaku je úmerný dĺžke potrubia ℓ a narastá s priemernou rýchlosťou prúdenia v_{av} . Konkrétny zápis pomocou hustoty kinetickej energie zabezpečuje potrebnú fyzikálnu jednotku pre tlak, takže dĺžka potrubia alebo koeficient trenia už musia vystupovať vo vzťahu prostredníctvom bezrozmerného čísla.

²Podobnosť tohto zápisu s Bernoulliho rovnicou pri nemennej hustote kinetickej energie je zjavná. Jednoduchú diskusiu s príkladmi využitia efektívnej Bernoulliho rovnice uvažujúcej aj viskózne straty možno nájsť napríklad v učebnom texte Červeň a Bokes: Fyzika po kapitolách, časť 5[24].

Naposledy uvedené neznamena, že koeficient trenia je konštantou. Ukazuje sa, že kvadratická závislosť od priemernej rýchlosti nie je univerzálna. Pri malých rýchlostiach očakávame, že Darcyho vzťah by mal byť totožný s viskóznym príspevkom k poklesu tlaku; úpravou (8.4.1) nachádzame

$$\Delta p = \frac{4\eta v_{\max}}{D^2/4} \ell = \frac{32\eta v_{\text{ave}}}{D^2} \ell = \frac{64}{D v_{\text{ave}} \rho / \eta} \frac{\ell}{D} \frac{1}{2} \rho v_{\text{ave}}^2,$$

a teda pri laminárnom prúdení identifikujeme koeficient trenia v tvare

$$f_D = \frac{64}{\text{Re}}, \quad (8.4.3)$$

kde sme zaviedli *Reynoldsovo číslo*

$$\text{Re} = \frac{D v_{\text{av}}}{\nu}. \quad (8.4.4)$$

Tento výsledok demonštruje, že bezrozmerná veličina (f_D) môže závisieť len od inej bezrozmernej veličiny, akou je v tomto prípade Reynoldsovo číslo. Podobne sme do Darcyho vzťahu mohli vnieť závislosť od dĺžky potrubia len prostredníctvom bezrozmerného faktora ξ .

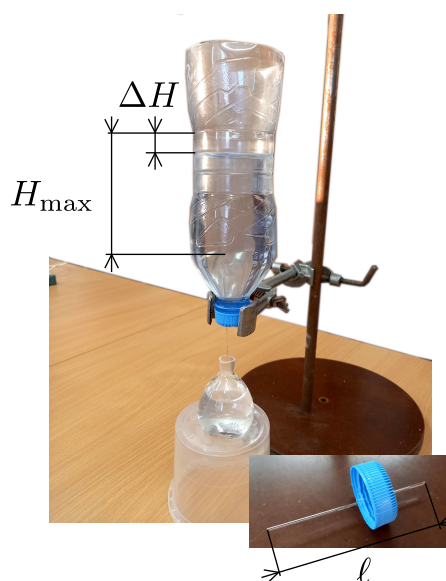
Pri narastajúcej rýchlosti prúdenia tekutiny v potrubí sa stáva Poiseuillov tok nestabilným, laminárne prúdenie sa rozpadá a rýchlostné pole vykazuje aj radiálnu a tangenciálnu zložku, môžu sa objavovať víry. Takýto režim prúdenia nazývame prechodným a objavuje sa vo valcovom potrubí pri hodnotách Reynoldsovho čísla okolo $\text{Re} \sim 2700$. Nakoniec pri dostatočne veľkej rýchlosti ($\text{Re} > 3000$) stacionárne riešenie neexistuje, tok nadobúda nepravidelne oscilujúci charakter s vírmi na veľkých aj malých priestorových škálach a takýto tok nazývame *turbulentným*. Napriek chaotickému prúdeniu má koeficient trenia reprodukovateľné experimentálne hodnoty. V širokom intervale Reynoldsových čísel ho vystihuje vzťah

$$f(\text{Re}) = \begin{cases} \frac{64}{\text{Re}} & \text{Re} \in (0, 3 \times 10^3) \\ 0,3164 \cdot \text{Re}^{-1/4} & \text{Re} \in (3 \times 10^3, 1 \times 10^5) \end{cases} \quad (8.4.5)$$

Takéto vzťahy sa nazývajú *kriteriálne rovnice* alebo aj *kriteriálne korelácie*, nakoľko dávajú do súvisu bezrozmerné čísla využívané ako kritériá na určenie kvalitatívneho charakteru prúdenia alebo prestupu tepla.

V praxi majú potrubia a chladiace či ohrevné kanály aj iné prierezy. Pre takéto prípady sa tiež používa Darcyho–Weisbachov vzťah, pričom na výpočet sa používa efektívny *hydraulický priemer*

$$D_H = \frac{4S}{O}, \quad (8.4.6)$$



Obr. 8.4.1: Jednoduchá experimentálna zostava na meranie viskozity kvapalín. Čas, za ktorý poklesne výška kvapaliny z maximálnej hodnoty H_{\max} o ΔH , je úmerný objemu vytečenej kvapaliny a jeho viskozite. Vďaka úzkemu vnútornému priemeru kapiláry, ktorou kvapalina vyteká, je prúdenie laminárne a tento vzťah úmernosti má jednoduché analytické vyjadrenie.

kde S je veľkosť plochy prierezu potrubia a \mathcal{O} je obvod, ktorým do potrubia vstupuje tepelný tok, resp. plocha, na ktorej pôsobia trecie viskózne sily. Pre kruhový prierez vedie táto definícia na hodnotu polomeru kruhu, nakoľko $S = \pi D^2/4$ a $\mathcal{O} = \pi D$.

Príklad 8.4.1 Nájdite hydraulický priemer pre chladiaci kanál s prierezom pravouhlého trojuholníka so stranami $a < b < c$, pričom teplo vstupuje do kanála len pozdĺž stien, ktorých šírka je a a b .

Riešenie:

$$S = \frac{1}{2}ab \quad (8.4.7)$$

$$\mathcal{O} = a + b \quad (8.4.8)$$

$$D_H = \frac{4S}{\mathcal{O}} = \frac{2ab}{a + b} \quad (8.4.9)$$

Príklad 8.4.2 Na obrázku je fotografia jednoduchej zostavy zodpovedajúcej kapilárnemu viskozimetru. Dĺžka kapiláry je $\ell = 75$ mm, jej vnútorný priemer

je $\phi = 0,94 \pm 0,07$ mm. $H_{\max} = 80$ mm a $\Delta H = 15$ mm. Meraním sme našli, že v priemere vytieklo $\Delta m = 38,3$ g vody za $\Delta t = 104$ s. Určte kinematickú viskozitu vody. Predpokladajte, že hustota vody je $\rho = 1000$ kg . m⁻³.

Riešenie: Ak $\Delta H \ll H_{\max}$ a rýchlosť prúdenia je dostatočne malá, môžeme predpokladať, že prúdenie je ustálené a laminárne, pričom prierná výška vodného stĺpca v obrátenej fľaši bude $H = H_{\max} - \Delta H/2$. Tok kvapaliny na výstupe kapiláry bude za týchto predpokladov konštantný,

$$J_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\rho \Delta t} \quad (8.4.10)$$

Pokles tlaku medzi koncami kapiláry (rozdiel tlaku na vstupe voči tlaku na výstupe) vyjadríme pomocou nárastu hydrostatického tlaku v kapiláre a príspevku z Darcyho vzťahu³

$$\Delta p = -\rho g \ell + \Lambda \frac{\ell}{\phi} \frac{1}{2} \rho v_{\text{av}}^2 \quad (8.4.11)$$

$$\Lambda = \frac{2^6}{\text{Re}} = \frac{2^6 \nu}{v_{\text{av}} \phi} \quad (8.4.12)$$

$$v_{\text{av}} = \frac{\phi^2}{2^5} \left(\frac{\Delta p}{\rho \ell} + g \right) \frac{1}{\nu} \quad (8.4.13)$$

$$J_V = S_{\text{kap}} v_{\text{av}} = \pi \frac{\phi^4}{2^7} \left(\frac{\Delta p}{\rho \ell} + g \right) \frac{1}{\nu} \quad (8.4.14)$$

Na druhej strane, rozdiel tlaku na vstupe a výstupe kapiláry možno vyjadriť aj z pohľadu okolia, nakoľko na výstupe kapiláry je atmosférický tlak a na vstupe je to súčet atmosférického tlaku a príspevku od vodného stĺpca. Výsledne nájdeme $\Delta p = H \rho g$, a teda výsledný vzťah pre kinematickú viskozitu vyjadrenú pomocou experimentálne známych veličín bude

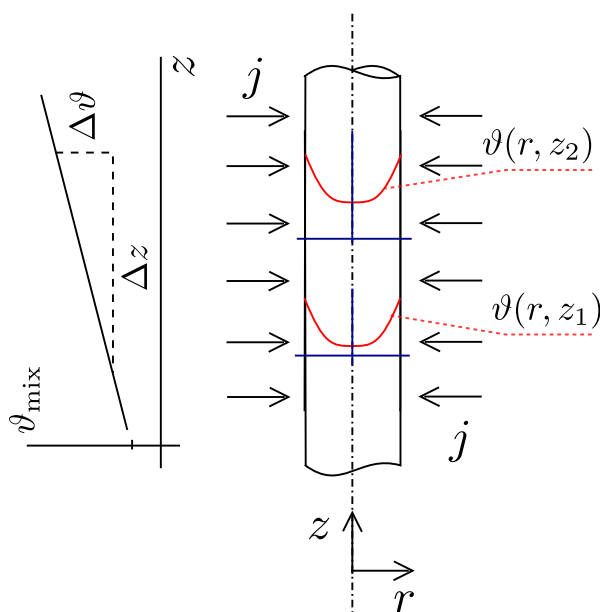
$$\nu = \frac{\pi}{2^7} \phi^4 \left(\frac{H}{\ell} + 1 \right) \rho g \frac{\Delta t}{\Delta m} \quad (8.4.15)$$

Dosadením zadaných hodnôt nájdeme $\nu = 1,00$ mm² . s⁻¹, štandardná hodnota kinematickej viskozity vody pri izbovej teplote.

Nakoniec overíme, že prúdenie je laminárne. Priemernú výtokovú rýchlosť nájdeme opäť z odmeraného toku,

$$v_{\text{av}} = \frac{J}{S_{\text{kap}}} = \frac{4 \Delta m}{\rho \Delta t \pi \phi^2} = 0,53 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (8.4.16)$$

³Používame vlastne presné riešenie Poiseuillovho toku 8.3.15.



Obr. 8.5.1: Potrubie do ktorého symetricky vstupuje teplo z prostredia. Prúdiaca kvapalina odvádza teplo prúdením (konvekciou) vertikálne nahor a neustály prestup tepla do kvapaliny spôsobuje nárast jej teploty s narastajúcou výškou.

a teda Reynoldsovo číslo bude v tomto prípade

$$\text{Re} = \frac{v_{\text{av}} \phi}{\nu} \approx 500 < 2300. \quad (8.4.17)$$

8.5 Prestup tepla v potrubí

Nech cez valcovú stenu potrubia vstupuje do vertikálne prúdiacej kvapaliny teplo s konštantnou hustotou toku, Obr. 8.5.1. Takúto situáciu predstavuje napríklad horúce teleso, cez ktoré sú vedené rúrky chladiaceho potrubia. Pri malých rýchlostiach prúdenia môžeme použiť na opis rýchlostného poľa výsledok z predchádzajúcej časti. Rovnica vedenia tepla (8.1.7) takto obsahuje jedinou neznámu funkciu – teplotné pole. Jej prepísaním do cylindrických súradníc pre stacionárne pole a s využitím argumentov symetrie podobne ako v predchádzajúcej kapitole nájdeme

$$\frac{\rho c_p}{\lambda} v_z(r) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \vartheta}{\partial r}. \quad (8.5.1)$$

K rovnici pre vyššie špecifikovanú konfiguráciu patria okrajové podmienky:

$$j_{Q,r}(r = R) = -j_Q \dots \text{vstupujúca hustota toku tepla z okraju} \quad (8.5.2)$$

$$\vartheta(z = 0) = \vartheta_0 \dots \text{teplota v počiatkovej výške,} \quad (8.5.3)$$

$$\vartheta(z = \ell) = \vartheta_1 \dots \text{teplota v koncovej výške.} \quad (8.5.4)$$

Pojem „počiatkovej“ a „koncovej“ výšky netreba brať doslovne. V našom modeli predpokladáme ustálené prúdenie, keď je vstup a výstup potrubia ďaleko vzdialený od miesta, kde počítame teplotné pole. Preto budeme pracovať s nárastom teploty na prírastku výšky Δz , $\frac{\Delta \vartheta}{\Delta z}$. Táto veličina zrejme bude súvisieť s oteplením pretekajúcej kvapaliny na jednotku dĺžky potrubia.

Rovnica (8.5.1) nie je vo všeobecnosti separovateľná, tak ako to bolo pre závislosť tlaku a rýchlosti, no nájdeme riešenie, ktoré separovateľné bude. Očakávame totiž, že teplota bude s nárastom súradnice z lineárne rásť. Preto ho budeme hľadať v tvare

$$\vartheta(r, z) = z c_0 + \chi(r). \quad (8.5.5)$$

Dosadením tohto tvaru do (8.5.1) dostaneme

$$c_0 \frac{\rho c_p v_{\max}}{\lambda} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \chi}{\partial r}, \quad (8.5.6)$$

kde sme dosadili aj rýchlostný profil z (8.3.14) a použili (8.3.15). Súčin konštant označíme⁴

$$\kappa = c_0 \frac{\rho c_p v_{\max}}{\lambda} R^2 \quad (8.5.7)$$

a po dvojnásobnom integrovaní a prípadnom násobení/delení s r nájdeme výsledok

$$\chi(r) = \kappa \left(\frac{r^2}{4R^2} - \frac{r^4}{16R^4} \right) + c_1 \ln(r) + c_2. \quad (8.5.8)$$

Výsledok musíme dať do súvisu so separovanou závislosťou na premennej z . Tým získame hľadané riešenie

$$\vartheta(r, z) = c_0 z + \kappa \left(\frac{r^2}{4R^2} - \frac{r^4}{16R^4} \right) + c_1 \ln(r) + c_2. \quad (8.5.9)$$

⁴Do definície κ včleníme aj faktor R^2 , aby fyzikálna jednotka κ bola rovnaká, ako má teplota. Vidieť to priamo z rovnice (8.5.6).

Okrajové podmienky určia integračné konštanty – konečnosť teploty v $r = 0$ vyžaduje $c_1 = 0$ a predpísaný tok tepla v $r = R$

$$-\lambda \left. \frac{\partial \vartheta(r,z)}{\partial r} \right|_{r=R} = -j_Q \quad (8.5.10)$$

vedie k podmienke

$$\kappa = \frac{4j_Q R}{\lambda}. \quad (8.5.11)$$

Ak použijeme definíciu parametru κ z rovnice (8.5.7), nájdeme vyjadrenie pre integračnú konštantu c_0

$$c_0 = \frac{4j_Q}{\rho c_p v_{\max} R}. \quad (8.5.12)$$

Z rovnice (8.5.5) je zjavné, že význam c_0 je nárast teploty pozdĺž potrubia

$$\frac{\Delta \vartheta}{\Delta z} = c_0 = \frac{4j_Q}{\rho c_p v_{\max} R}. \quad (8.5.13)$$

Táto rovnica je ekvivalentná bilancii energie: energia vstupujúca do potrubia na dĺžke Δz hustotou toku j_Q sa rovná prírastku toku vnútornej energie kvapalinou (pozri aj úlohy 8.1.2 a 8.5.1). Táto rovnica je zároveň dôležitá pri návrhu chladienia. Nárast teploty na celkovej dĺžke potrubia $(\Delta \vartheta / \Delta z) \ell$, kde ℓ je dĺžka potrubia, nesmie prekročiť predpísanú hodnotu, lebo to by znamenalo, že aj teplota samotného chladieného telesa okolo potrubia voči teplote vstupujúcej chladiacej kvapaline by prekročila určitú kritickú hodnotu. Podľa vzťahu (8.5.13), na zníženie tohto oteplenia musíme zvýšiť buď prietokovú rýchlosť (danú nepriamo v_{\max}), polomer potrubia alebo tepelnú kapacitu chladiacej kvapaliny.

Konštantu c_2 vo všeobecnom riešení predstavuje teplotu kvapaliny na osi potrubia v mieste, kde zvolíme $z = 0$. Ak ju zvolíme rovnú nule, nájdeme teplotné pole bude predstavovať oteplenie voči tomuto miestu. V konečnom dôsledku nás bude zaujímať len rozdiel teplôt na vstupe a výstupe potrubia, a preto akákoľvek voľba je v poriadku.

Nakoniec uvedieme ešte raz hlavný výsledok tejto časti – nájdenny profil teplotného poľa v prúdiacej kvapaline, ktorá konvektívne odvádza teplo,

$$\vartheta(r,z) = \frac{\Delta \vartheta}{\Delta z} z + \kappa \left(\frac{r^2}{4R^2} - \frac{r^4}{16R^4} \right). \quad (8.5.14)$$

Úloha 8.5.1 Ukážte, že rovnica (8.5.13) je ekvivalentná energetickej bilancii: celkové teplo privádzané povrchom potrubia za jednotku času sa rovná nárastu toku vnútornej energie kvapaliny po prechode potrubím.

Úloha 8.5.2 Aký celkový stratový výkon odvádza 1 m potrubia s priemerom 1 cm, ktorým prúdi voda tokom 1 dcl za sekundu, ak sa pri tom ohreje o 1 °C? Aká je jeho priemerná rýchlosť?

Úloha 8.5.3 Predstavme si situáciu, že stena potrubia má konštantnú teplotu (nezávisí od z), ktorá je vyššia ako teplota kvapaliny vstupujúcej do potrubia. Ako sa zmenia okrajové podmienky na teplotu pozdĺž steny – $z \in (0, \ell)$ a $r = R$? Predstavte si závislosť priemernej teploty kvapaliny od súradnice z . Možno stále očakávať, že bude táto závislosť lineárna?

8.6 Koeficient prestupu tepla v potrubí

Zavedenie koeficientu prestupu tepla α rovnicou (8.2.1) vyžaduje vhodnú definíciu referenčnej teploty ϑ_{ref} . Podľa výsledku (8.5.14) bude teplota kvapaliny na jej rozhraní so stenou potrubia $\vartheta(z, r = R)$ lineárne narastať s narastajúcou výškou z . Znamená to, že voľba referenčnej teploty nezávislej od súradnice z , napríklad priemerná teplota vstupujúcej kvapaliny do potrubia, by nevyhnutne viedla na koeficient prestupu tepla závislý od tejto súradnice $\alpha = \alpha(z)$. V prípade nami študovaného ustáleného prestupu tepla v potrubí sa dá tomuto vyhnúť voľbou premenlivej referenčnej teploty, určenej v rovnakej výške z v akej chceme vyjadriť samotný koeficient prestupu tepla, $\vartheta_{\text{ref}} = \vartheta_{\text{ref}}(z)$. Konvenčnú voľbu referenčnej teploty v prípade kvapaliny prúdiacej potrubím predstavuje *teplota premiešanej kvapaliny* (z angl. *mixing cup temperature*) definovaná vzťahom

$$\vartheta_{\text{mix}}(z) = \frac{\int_S \rho c \vartheta(r, z) \vec{v} \cdot d\vec{S}}{\int_S \rho c \vec{v} \cdot d\vec{S}}. \quad (8.6.1)$$

Teplota premiešanej kvapaliny predstavuje teplotu, akú by mala prúdiaca kvapalina s konštantným teplotným profilom (nezávislým od r), ktorá by vykazovala ten istý tok vnútornej energie ako kvapalina so skutočným teplotným profilom.

Ak by sme nechali tiecť kvapalinu z potrubia do tepelne izolovanej nádoby, kde by sa táto kvapalina hromadila, tak teplota tejto nahromadenej

kvapaliny by bola práve teplota premiešanej kvapaliny na výstupe z potrubia. Podobne, teplota kvapaliny, ktorá sa nachádza v pokoji v určitom rezervoári a vstupuje do potrubia, bude rovná teplote premiešanej kvapaliny na vstupe do potrubia.

Teplotu na rozhraní kvapaliny a steny potrubia a teplotu premiešanej kvapaliny vo výške z možno nájsť zo vzťahov (8.5.9), (8.6.1):

$$\vartheta(r = R, z) = c_0 z + \frac{3}{16} \kappa \approx c_0 z + 0,188 \kappa, \quad (8.6.2)$$

$$\vartheta_{\text{mix}}(z) = c_0 z + \frac{7}{96} \kappa \approx c_0 z + 0,073 \kappa, \quad (8.6.3)$$

z čoho nájdeme koeficient prestupu tepla podľa rovnice (8.2.1) a vzťahu (8.5.11)

$$\alpha(z) = \frac{j_Q}{\vartheta(r = R, z) - \vartheta_{\text{mix}}(z)} = \frac{24 \lambda}{11 R}. \quad (8.6.4)$$

Výsledný koeficient prestupu s takto vhodne zavedenou referenčnou teplotou nakoniec nezávisí od výšky, je konštantný.

Koeficient prestupu tepla možno zapísať pomocou bezrozmerného *Nusseltovho čísla*

$$\text{Nu} = \frac{\alpha D}{\lambda}, \quad (8.6.5)$$

kde $D = 2R$ je priemer potrubia. V prípade laminárneho prúdenia vo vertikálnom potrubí sme našli výsledok

$$\text{Nu} = \frac{48}{11} \approx 4,36. \quad (8.6.6)$$

Definícia (8.6.5) je použiteľná, aj keď sa laminárne prúdenie stane nestabilným, či pre prípad režimu, keď hustotu tepleného toku j_Q nemožno považovať za nezávislú od priestorových súradníc (pozri diskusiu v časti 8.2). V takýchto prípadoch pracujeme s vhodne ustredneným koeficientom prestupu tepla, ktorému prostredníctvom definície zodpovedá priemerné Nusseltovo číslo. Podobne ako v prípade koeficientu trenia, ktorý určuje pokles tlaku v potrubí, aj Nusseltovo číslo možno vo všeobecnosti určiť kritériálnou rovnicou z bezrozmerných kombinácií relevantných fyzikálnych veličín, ako sú Reynoldsovo číslo $\text{Re} = v_{\text{ave}} D / \nu$ alebo pomer priemeru a dĺžky potrubia $\xi = D / \ell$.

Často používaným funkcionálnym tvarom kritériálnej rovnice pre Nusseltovo číslo je mocinná funkcia v tvare

$$\text{Nu} = C \text{Re}^m \text{Pr}^n \xi^k, \quad (8.6.7)$$

látka	ortuť	vzduch	voda	transformátorový olej
Pr	0,015	0,71	7,6	300

Tabuľka 8.2: Typické hodnoty Prandtlovho čísla látok pri $T = 300\text{ K}$ a $p_a = 10^5\text{ Pa}$.

kde C , m , n a k sú parametre, ktoré sa určujú fitovaním experimentálnych meraní. Novým bezrozmerným číslom v tomto vzťahu je *Prandtlovo číslo*

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\nu_D} = \frac{\eta}{\frac{\lambda}{c_p \rho}}. \quad (8.6.8)$$

Prandtlovo číslo je materiálová charakteristika tekutiny a zodpovedá pomeru kinematickej viskozity a teplotnej difuzivity. Pre plyny je Prandtlovo číslo typicky blízke jednotke, čo hovorí o tom, že lokálna fluktuácia rýchlosti (hybnosti) v plyne sa šíri rovnakým náhodným difúznym mechanizmom ako lokálna fluktuácia teploty. Látky, pre ktoré mikroskopický opis pomocou kinetickej teórie plynov je nedostatočný, ako sú tekuté kovy alebo oleje, majú Prandtlovo číslo výrazne odlišné od jednotky (Tabuľka 8.2).

Experimentálne získané parametre kriteriálnej rovnice (8.6.7) možno nájsť v monografiách o prestupe tepla [18, 19, 20]. Napríklad, pre rozvinuté turbulentné prúdenie ($\text{Re} \gg 3000$), pre dostatočne dlhé potrubie ($\ell \gg D$) s dostatočne hladkým povrchom sa často používajú hodnoty $C = 0,023$, $m = 0,8$, $n = 0,3$ a $k = 0$ získané Dittusom a Boelterom. Ak má potrubie nezanedbateľný pomer priemeru a dĺžky ($10 < 1/\xi < 400$) sú experimentálne dáta dobre opísané Dittusovými–Boelterovými parametrami s pridanou hodnotou exponentu pre $\xi - k = 0,055$. Pre prípad potrubia s konštantnou teplotou povrchu, konečnou dĺžkou a laminárnym prúdením Hausen podľa Holmana odporúča vzťah

$$\text{Nu} = 3,66 + \frac{0,0668 \text{RePr}\xi}{1 + 0,04 (\text{RePr}\xi)^{2/3}}. \quad (8.6.9)$$

Vzájomným porovnaním týchto vzťahov sa môžeme presvedčiť, že pri ich využívaní nemôžeme očakávať presnosť lepšiu ako niekoľko desiatok percent. V praxi pri požiadavkách na vyššiu presnosť výpočtových modelov je preto potrebné hodnoty parametrov doladiť na triedy podobných dizajnov konštruovaných zariadení.

Úloha 8.6.1 Spočítajte koeficient prestupu tepla do chladiaceho potrubia s priemerom $D = 1\text{ cm}$, ktorým tečie voda priemernou rýchlosťou $v_{av} =$

25 cm/s. Je prípustné predpokladať, že v tomto prípade platí vzťah pre koeficient prestupu tepla pre laminárne prúdenie? Koeficient tepelnej vodivosti pri 20 °C je 0,6 W/(m · K), viskozita $\eta = 1 \text{ mPa} \cdot \text{s}$.

Úloha 8.6.2 Vypočítajte teplotu premiešanej kvapaliny vo výške z pre laminárne prúdenie ak

$$\vartheta(z,r) = c_0 z + \kappa \left(\frac{r^2}{4R^2} - \frac{r^4}{16R^4} \right) \quad (8.6.10)$$

$$v_z(r) = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (8.6.11)$$

Pomôcka: Plošný integrál cez prierez potrubia možno napísať priamo v polárnych súradniciach $dS = 2\pi r dr$.

Úloha 8.6.3 Z rovnice (8.6.4) vidno, že koeficient prestupu tepla možno zväčšiť zmenšením polomeru potrubia. Na prvý pohľad, väčší koeficient prestupu by mohol viesť k lepšiemu odvodu tepla. Ak dvakrát zmenšíme polomer potrubia, ako sa zmení oteplenie kvapaliny na výstupe potrubia? Ako sa preto zmení priemerné oteplenie telesa, ktoré kvapalina chladí?

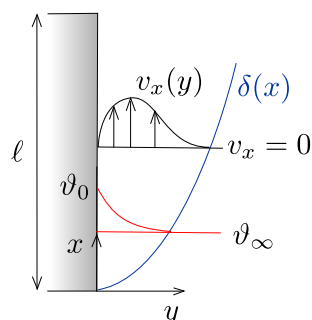
Pomôcka: K odpovedi na prvú otázku pomôže rovnica (8.5.13).

8.7 Prirodzené prúdenie

Doposiaľ sme sa zaoberali prestupom tepla tekutinou, ktorej prúdenie je vynútené vonkajším silovým pôsobením, napríklad čerpadlom. Prirodzené prúdenie v tekutinách vzniká spontánne ako dôsledok súhry teplotnej rozťažnosti tekutín a pôsobenia gravitačného poľa. Časť tekutiny s objemom V , ktorá sa lokálne ohreje o $\Delta\vartheta$, napríklad od horúcej steny, zväčší svoj objem na V' . Nárast objemu zodpovedá poklesu jej hustoty z ρ_{ref} na ρ' , čo možno v rámci lineárneho priblíženia opísať koeficientom teplotnej rozpínavosti β ,

$$\rho' = \rho_{\text{ref}} (1 - \beta \Delta\vartheta). \quad (8.7.1)$$

Ak okolitá tekutina má nezmenenú teplotu ϑ_{ref} , potom v dôsledku hydrostatického tlaku bude na objem ohriatej tekutiny pôsobiť vztlaková sila $\vec{F}_{\text{vz}} = -\rho_{\text{ref}} \vec{g} V'$, kým tiažová sila bude len $\vec{F}_{\text{g}} = \rho' \vec{g} V'$. Ich nenulová výslednica $\vec{F}_{\text{vz}} + \vec{F}_{\text{g}} = -\beta \Delta\vartheta \rho_{\text{ref}} V' \vec{g}$ sa prejaví rozchýbaním otepleného objemu tekutiny proti smeru gravitačnej sily.



Obr. 8.7.1: Rýchlostný a teplotný profil prirodzeného prúdenia popri vertikálnej stene. Ku konvencii dochádza len vnútri medznej vrstvy určenej funkciou $\delta(x)$.

Konkrétne budeme v tejto kapitole uvažovať prestup tepla z horúcej vertikálnej steny (ϑ_0) do polonekonečnej oblasti ($y > 0$), v ktorej sa nachádza tekutina s teplotu $\vartheta_\infty \equiv \vartheta_{\text{ref}}$. Ak by mala stena rovnakú teplotu ako tekutina, sústava by bola v rovnováhe. Rýchlosť jej prúdenia by bola všade nulová a hydrostatický tlak by sa menil podľa predpisu $p(x) = p(0) - \rho g x$ (na uvažovaných rozmeroch zanedbávame zmeny hustoty v dôsledku gravitačného pôsobenia, t. j. stlačiteľnosť).

Ak bude teplota povrchu steny mierne vyššia ako je teplota tekutiny, $0 < \beta(\vartheta_0 - \vartheta_\infty) \ll 1$, v tesnej blízkosti steny sa bude tekutina ohrievať a v dôsledku vyššie opísaného mechanizmu bude stúpať vertikálne nahor. Teplo preto dokáže prestúpiť len do určitej konečnej horizontálnej vzdialenosti od steny $\delta(x)$. V oblasti $0 < y < \delta(x)$ dochádza k ohrevu a rozpochybovaniu tekutiny. Táto oblasť sa nazýva *medzná vrstva* (po anglicky *boundary layer*). Mimo medznej vrstvy je tekutina v pokoji a jej teplota je nemenná. Koncept medznej vrstvy zaviedol pre opis vynúteného prúdenia Ludwig Prandtl v polovici 19. storočia. Tento krok výrazne prispel ku kvantitatívnemu porozumeniu prúdenia tekutín v okolí telies (aerodynamika) a v potrubí.

Pre opis prestupu tepla v načrtnutej situácii vychádzame zo stacionárnych rovníc prúdenia a prestupu tepla (8.1.6), (8.1.7) a (8.1.8). Budeme predpokladať, že rozdiel teploty steny a tekutiny predstavujú malú poruchu z hľadiska riešenia týchto rovníc, pričom rovnakého rádu bude aj x -ová zložka rýchlosti prúdenia. Ďalší predpoklad bude, že y -ovú zložku rýchlosti budeme považovať za malú veličinu druhého rádu, čo cez rovnicu kontinuity (8.1.8) vyžaduje, aby aj $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ bola druhého rádu. To, že sú tieto predpoklady opodstatnené, sa možno presvedčiť tak, že nájdené výsledky dokážu kvantitatívne opísať charakter laminárneho prirodzeného prúdenia.

Rovnica vedenia tepla, ak ju vyjadríme pre oteplenie voči teplote vzdialenej tekutiny $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_\infty$ nadobudne tvar $\nabla^2(\Delta\vartheta) = 0$. Oteplenie vnútri medznej vrstvy musí spĺňať okrajové podmienky

$$\Delta\vartheta(x,0) = \Delta\vartheta_0, \quad (8.7.2)$$

$$\Delta\vartheta(x,\delta(x)) = 0, \quad (8.7.3)$$

$$j_{Q,y}(x,\delta(x)) = -\lambda \left. \frac{\partial}{\partial y} \Delta\vartheta(x,y) \right|_{y=\delta(x)} = 0, \quad (8.7.4)$$

ktoré možno zabezpečiť pre riešenie v tvare polynómu vzhľadom na premennú y :

$$\Delta\vartheta(x,y) = c_0(x) + c_1(x)y + c_2(x)y^2. \quad (8.7.5)$$

Dosadením do podmienok nájdeme tvar funkcií $c_i(x)$ a odhad profilu oteplenia tekutiny

$$\Delta\vartheta(x,y) = \Delta\vartheta_0 \left(1 - \frac{y}{\delta(x)}\right)^2. \quad (8.7.6)$$

Funkcionálny tvar medznej vrstvy $\delta(x)$ je nateraz neznámy.

Nultý rád stacionárnej Navierovej–Stokesovej rovnice (8.1.6) predstavuje hydrostatickú úlohu pre tlak

$$0 = -\nabla p - \rho_{\text{ref}} g \vec{v}.$$

Veličiny prvého rádu v (8.1.6) vo vyššie uvedenom zmysle vedú na rovnicu

$$0 = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \Delta\rho g. \quad (8.7.7)$$

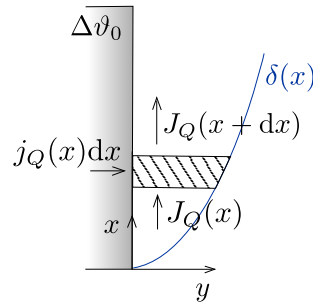
Rozdiel hustoty voči jej referenčnej hodnote $\Delta\rho = \rho' - \rho_{\text{ref}}$ v rámci lineárneho priblíženia závisí od oteplenia, 8.7.1, ktorého tvar sme upresnili v 8.7.6. Po ich dosadení do 8.7.7 nachádzame rovnicu pre $v_x(x,y)$

$$0 = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \rho_{\text{ref}} g \beta \Delta\vartheta_0 \left(1 - \frac{y}{\delta(x)}\right)^2. \quad (8.7.8)$$

Jej dvojnásobným integrovaním nájdeme rýchlostný profil prirodzeného prúdenia v medznej vrstve:

$$v_x(x,y) = \frac{g\beta\Delta\vartheta_0}{\nu} \frac{\delta(x)^2}{12} \left(1 - \frac{y}{\delta(x)}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{y}{\delta(x)}\right)^3\right]. \quad (8.7.9)$$

Pri integrovaní sme uvážili okrajové podmienky $v_x(x,0) = 0$, $v_x(x,\delta(x)) = 0$. Nájdenný rýchlostný profil (8.7.9) aj profil oteplenia (8.7.6) majú priebeh naznačený na obrázku (8.7.1).



Obr. 8.8.1: Hraničnú vrstvu rozdelíme na infinitezimálne elementy s výškou dx . Pre každý element určíme toky tepla, ktoré doň vstupujú.

8.8 Energetická bilancia medznej vrstvy

V predchádzajúcej časti sme navrhli funkcionálny tvar pre teplotný profil bez toho, aby sme riešili samotnú rovnicu vedenia tepla. Spätným dosadením vzťahu (8.7.6) do rovnice vedenia tepla by sme sa presvedčili, že tento predpis nie je jej riešením. Von Kármán inicioval približný prístup k opisu prúdenia v medznej vrstve – ak nedokážeme nájsť riešenie rovníc lokálne v každom mieste medznej vrstvy, pokúsme sa nájsť výsledky spĺňajúce tieto rovnice aspoň integrálne vo vhodne zvolených elementoch. Výsledkom takejto úvahy bude rovnica pre funkcionálny tvar medznej vrstvy $\delta(x)$.

Element medznej vrstvy s výškou dx je zobrazený na obrázku 8.8.1. Z vertikálnej steny vstupuje do elementu na jednotku šírky steny množstvo vnútornej energie

$$j_{Q,x}(x)dx = -\lambda \left. \frac{\partial \Delta\vartheta(x,y)}{\partial y} \right|_{x=0} dx.$$

Zospodu do elementu vstupuje, opäť na jednotku šírky steny, konvektívny tok vnútornej energie

$$J_Q(x) = \int_0^{\delta(x)} \rho c_p \Delta\vartheta(x,y) v_x(x,y) dy. \quad (8.8.1)$$

Vzhľadom na veľkosť oteplenia aj rýchlosti prúdenia môžeme považovať hustotu a tepelnú kapacitu za zhodné s ich referenčnými hodnotami. Vyčíslenie konvektívneho toku možno spraviť pomocou získaných výsledkov z predchádzajúcej časti pre oteplenie (8.7.6) a rýchlosť prúdenia (8.7.9):

$$J_Q(x) = \rho c_p \Delta\vartheta_0 \frac{g\beta\Delta\vartheta_0}{\nu} \frac{\delta(x)^3}{12} \zeta, \quad (8.8.2)$$

$$\zeta = \int_0^1 (1-z)^3 [1 - (1-z)^3] dz = \frac{3}{28}. \quad (8.8.3)$$

Výrazom (8.8.1) kvantifikujeme aj tok vnútornej energie horným ohraničením elementu, ak ho vyčíslime na pozícii $x + dx$. Na okraji medznej vrstvy, v $y = \delta(x)$ je tok energie nulový. Energetická bilancia pre zvolený element teda nadobúda tvar

$$-J_Q(x + dx) + J_Q(x) - \lambda \left. \frac{\partial}{\partial y} \Delta \vartheta(x, y) \right|_{x=0} dx = 0. \quad (8.8.4)$$

Predelením tejto rovnice infinitezimálnou výškou dx identifikujeme deriváciu konvektívneho toku

$$-\frac{d}{dx} J_Q(x) - \lambda \left. \frac{\partial}{\partial y} \Delta \vartheta(x, y) \right|_{x=0} = 0.$$

Nakoniec dosadením výrazov (8.8.2) a (8.7.6) do posledného a prevedením derivácií nachádzame diferenciálnu rovnicu pre medznú vrstvu

$$\frac{g\beta\Delta\vartheta_0}{\nu\nu_D} \frac{\delta(x)^2}{4} \frac{d\delta(x)}{dx} \zeta - \frac{2}{\delta(x)} = 0, \quad (8.8.5)$$

ktorej riešenie s okrajovou podmienkou $\delta(0) = 0$ predstavuje funkcia

$$\delta(x) = \left(\frac{2^{7.7}}{3} \frac{x}{g\beta\Delta\vartheta_0/(\nu\nu_D)} \right)^{1/4}. \quad (8.8.6)$$

Z výsledku vidíme, že šírka laminárnej medznej vrstvy pre prirodzené prúdenie pomaly narastá, konkrétne ako štvrtá odmocnina výšky pozdĺž vertikálnej steny. Dosadením tohto vzťahu pre šírku medznej vrstvy do rovníc (8.7.6) a (8.7.9) získavame úplný, aj keď len približný opis prirodzeného prúdenia popri teplej vertikálnej stene.

8.9 Koeficient prestupu tepla pri prirodzenom prúdení

Detailné výsledky predchádzajúcej kapitoly často nie sú potrebné pre kvantitatívne výpočty prestupu tepla. Podobne ako pri vynútenom prúdení, aj pri prirodzenom prúdení je najdôležitejšie poznať priemerný koeficient prestupu tepla medzi povrchom (stenou) a tekutinou. Lokálny koeficient $\alpha(x)$ je daný všeobecnou definíciou (8.2.1) vo výške x vertikálnej steny a s výsledkami (8.7.6) a (8.7.9). Ich dosadením nachádzame

$$\alpha(x) = \frac{2\lambda}{\delta(x)}. \quad (8.9.1)$$

Je užitočné zdôrazniť, že λ je koeficient tepelnej vodivosti tekutiny a nie materiálu vertikálnej steny.

Koeficient prestupu tepla charakterizujeme bezrozmerným lokálnym Nusseltovým číslom

$$\text{Nu}_x = \frac{\ell\alpha(x)}{\lambda} = 2 \left(\frac{2^7 \cdot 7}{3} \frac{x/\ell}{g\beta\Delta\vartheta_0\ell^3/(\nu\nu_D)} \right)^{-1/4}, \quad (8.9.2)$$

kde úlohu charakteristického rozmeru má výška vertikálnej steny ℓ . Tento výsledok možno zapísať do tvaru bezrozmernej kritériálnej rovnice pre laminárne prirodzené prúdenie v tvare

$$\text{Nu}_x \approx 0,48 \xi^{-1/4} \text{Ra}^{1/4}, \quad (8.9.3)$$

kde bezrozmerný pomer charakterizujúci miesto určenia lokálneho koeficientu je $\xi = x/\ell$ a *Rayleighovo číslo* predstavuje kombináciu fyzikálnych veličín relevantných pre prirodzené prúdenie

$$\text{Ra} = \frac{g\beta\Delta\vartheta_0\ell^3}{\nu\nu_D}. \quad (8.9.4)$$

Nakoľko predpokladáme, že teplota steny je po celej svojej výške konštantná, užitočná definícia priemerného koeficientu prestupu tepla bude daná vzťahom (8.2.6), t. j. pri označení celkovej výšky steny ℓ a využití (8.8.6) nachádzame

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{2\lambda}{\delta(x)} dx = \frac{4}{3} \frac{2\lambda}{\delta(\ell)}. \quad (8.9.5)$$

Podobne nájdeme aj priemerné Nusseltovo číslo

$$\text{Nu} = \frac{4}{3} \text{Nu}_\ell \approx 0,64 \text{Ra}^{1/4}. \quad (8.9.6)$$

Tento vzťah platí len ak sú splnené vyššie spomenuté predpoklady: malý rozdiel teplôt steny a tekutiny, konštantná teplota steny, laminárne prúdenie. V praxi sa preto využívajú touto rovnicou motivované kritériálne rovnice v tvare $\text{Nu} = C\text{Ra}^n$ s parametrami C a n určenými meraním. Podobne ako pri vynútenom prúdení, aj pri prirodzenom prúdení možno pozorovať viaceré kvalitatívne odlišných režimov – pre nižšie hodnoty Rayleigho čísla pozorujeme laminárne prúdenie, pre vyššie rozvinuté turbulentné prúdenie. Toto sa odzrkadľuje aj v odlišných hodnotách parametrov kritériálnej rovnice, ako je uvedené v tabuľke 8.3.

V prípade vertikálnej steny s predpísanou (konštantnou) hustotou tepelného toku j_Q nie je vyhodnotenie Rayleigho čísla priamočiare – vstupuje doň

Ra	C	n
$10^4 - 10^9$	0,59	1/4
$10^9 - 10^{13}$	0,1	1/3

Tabuľka 8.3: Hodnoty parametrov pre kritériálnu rovnicu prirodzeného prúdenia určujúcu Nusseltovo číslo popri vertikálnej stene s konštantnou teplotou [18].

Ra*	C	n
$10^5 - 10^{11}$	0,6	1/5
$10^{13} - 10^{16}$	0,17	1/4

Tabuľka 8.4: Hodnoty parametrov pre kritériálnu rovnicu prirodzeného prúdenia určujúcu Nusseltovo číslo popri vertikálnej stene s konštantnou hustotou toku tepla [18]

totiž (priemerné) oteplenie steny voči tekutine, ktoré je na začiatku výpočtu neznáme. Nakoľko lokálne oteplenie možno zo znalosti lokálneho Nusseltovho čísla vypočítať, $\Delta\vartheta(x) = j_Q/\alpha(x) = j_Q\ell/(\text{Nu}_x\lambda)$, možno Rayleigho číslo vyjadriť takto

$$\text{Ra} = \frac{g\beta\ell^3}{\nu\nu_D}\Delta\vartheta_0 = \frac{g\beta\ell^3}{\nu\nu_D}\frac{j_Q\ell}{\text{Nu}\lambda}. \quad (8.9.7)$$

Tento vzťah motivuje zavedenie *modifikovaného Rayleigho čísla*

$$\text{Ra}^* = \text{Ra} \cdot \text{Nu} = \frac{g\beta j_Q \ell^4}{\lambda \nu \nu_D}, \quad (8.9.8)$$

ktoré sa používa v kritériálnej rovnici $\text{Nu} = C(\text{Ra}^*)^n$ pre Nusseltovo číslo v takomto prípade (Tabuľka 8.4).

Nakoniec uvedme, že miesto Rayleigho čísla sa niekedy používa *Grashofovo číslo*

$$\text{Gr} = \frac{g\beta\Delta\vartheta_0\ell^3}{\nu^2}, \text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} \quad (8.9.9)$$

ktoré v súčine s Prandtlovým číslom dá Rayleigho číslo. Komplikovanejšie experimentálne fitované kritériálne rovnice pre Nusseltovo číslo vyjadrené pomocou Grashofovho a Prandtlovho čísla môžu obsahovať tieto dve kombinácie nezávisle, nie len v súčine vo forme Rayleigho čísla. Úplne analogicky a z takých istých dôvodov sa zavádza aj modifikované Grashofovo číslo Gr^* .

Príklad 8.9.1 Určte koeficient prestupu tepla z povrchu hrnca do okolia z príkladu 7.2.1 na strane 136. Počiatočná teplota vody v hrnci bola $\vartheta_0 = 40\text{ °C}$ a teplota okolitého vzduchu $\vartheta_\infty = 22\text{ °C}$. Na výpočet Reynoldsovo čísla použite fyzikálne charakteristiky vzduchu pri (a) teplote vzduchu v miestnosti ϑ_∞ a (b) pri odhadovanej *teplote medznej vrstvy* $\vartheta_f = (\vartheta_0 + \vartheta_\infty)/2$.

Riešenie: (a) V príklade 7.2.1 má hrniec výšku $\ell = 0,09\text{ m}$. Na určenie koeficientu teplotnej rozpínavosti vzduchu môžeme použiť model ideálneho plynu, $\beta = 1/T = 1/(273,15 + \vartheta_0) \approx 3,4 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$. Kinematickú viskozitu vzduchu pri 22 °C určíme z grafu 5.4.2 na strane 94 – $\nu = 15 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Difuzivitu vzduchu určíme z hodnoty jeho tepelnej vodivosti $\lambda \approx 0,026\text{ W} \cdot (\text{m} \cdot \text{K})^{-1}$, hustoty $\rho = M_m p_a / (RT) \approx 1,2\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a hmotnostnej tepelnej kapacity $c_p = (7/2)R/M_m \approx 1000\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\nu_D = \lambda / (\rho c_p) \approx 2,2 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Z týchto hodnôt vypočítame

$$\text{Ra} = \frac{10 \cdot 3,4 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 0,09^3}{15 \cdot 10^{-6} \cdot 2,2 \cdot 10^{-5}} \approx 1,4 \cdot 10^6$$

Podľa tabuľky 8.3 ide o laminárny režim, preto

$$\text{Nu} = 0,59(1,4 \cdot 10^6)^{1/4} \approx 20,3$$

Nakoniec z Nusseltovho čísla nájdeme aj priemerný koeficient prestupu tepla $\alpha = \lambda \text{Nu} / \ell \approx 5,9\text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Porovnanie s výsledkom nie veľmi presného experimentálneho merania z príkladu (7.2.1) je uspokojujivé.

Úloha 8.9.2 Použitím kritériálnej rovnice (8.9.6) a definície modifikovaného Reynoldsovo čísla odhadnite hodnoty parametrov kritériálnej rovnice pre prirodzené prúdenie pri predpísanej hustote toku tepla a porovnajte s hodnotami v tabuľke 8.4.

Kapitola 9

Prenos tepla žiarením

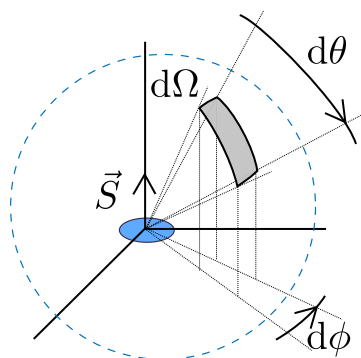
V podkapitole 6.2 bola zavedená radiačná okrajová podmienka, ktorá zahŕňa tepelné žiarenie povrchu do vonkajšieho priestoru a absorpciu žiarenia týmto povrchom. V tejto kapitole ukážeme, ako možno sformulovať úlohu výmeny tepla žiarením medzi sústavou povrchov, každý majúci určitú teplotu a emisivitu. Fyzikálny základ radiačnej výmeny predstavuje Stefanov–Boltzmanov zákon vyžarovania absolútne čierneho telesa. Tento zákon, jeho odvodenie a diskusia sú súčasťou úvodných kurzov fyziky alebo kvantovej mechaniky [25, 26], a preto sa im v tejto učebnici nevenujeme. Radiačnej výmene medzi zemským povrchom, atmosférou Zeme a Slnkom vďačíme za tepelné pomery na Zemi vhodné pre ľudí. Pre zaujímavý a zároveň dobre čitateľný opis tohto mechanizmu odporúčame knihu Zahalená planéta [27].

9.1 Lambertov zákon a difúzny rozptyl

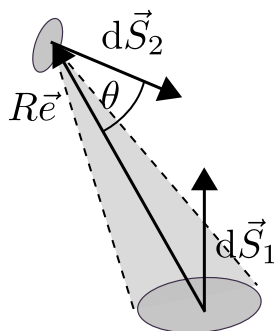
Stefanov–Boltzmanov zákon určuje intenzitu tepelného vyžarovania absolútne čierneho telesa M do celého polpriestoru nad jeho uvažovaným povrchom. Pri výpočte žiarenia dM emitovaného do špecifického smeru daného priestorovým uhlom $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\phi$, kde sférický uhol θ je medzi uvažovaným smerom šírenia žiarenia a normálou povrchu (Obr. 9.1.1), sa najčastejšie stretávame s „kosínusovou“ závislosťou tohto príspevku

$$dM = M \frac{1}{\pi} \cos(\theta) d\Omega, \quad (9.1.1)$$

ktorá sa nazýva *Lambertov zákon*. V skutočnosti ide skôr o pragmatický kompromis reality a jednoduchosti opisu. Napríklad, povrch vylešteného kovu vyžaruje výrazne viac energie pod veľkým uhlom voči normále povrchu ako predpovedá Lambertov zákon, pričom táto smerová závislosť sa môže meniť v závislosti od teploty (alebo aj vlnovej dĺžky) žiarenia.



Obr. 9.1.1: Príspevok k tepelnému vyžarovaniu plôšky $d\vec{S}$ do priestorového uhla $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\phi$.



Obr. 9.1.2: K vyjadreniu zlomku žiarenia od plôšky $d\vec{S}_2$ k plôške $d\vec{S}_1$, s vyznačením polohového vektora $R\vec{e}$ plôšky 2 voči plôške 1 a priestorového uhlu, pod ktorým vidieť plôšku 1 z plôšky 2.

Faktor $1/\pi$ v rovnici zaručuje, že celkové množstvo energie vyžiarenej malým rovinným povrchom do celého polpriestoru je dané intenzitou vyžarovania M :

$$\int dM = \frac{M}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cos(\theta) \sin(\theta) = \frac{M}{\pi} \pi = M.$$

Uvažujme dva plošné elementy $d\vec{S}_1$ a $d\vec{S}_2$ ideálne čiernych telies, medzi ktorými dochádza k tepelnej výmene žiarením. Žiarenie prichádzajúce k elementu $d\vec{S}_1$ od elementu $d\vec{S}_2$ predstavovuje iba určitý zlomok celkového toku energie od elementu $d\vec{S}_2$.

Polohový vektor plôšky $d\vec{S}_2$ voči plôške $d\vec{S}_1$ si označme ako $R\vec{e}$, kde $|\vec{e}| = 1$ je jednotkový vektor a R priama vzdialenosť uvažovaných elemen-

to (Obr. 9.1.2). Zlomok žiarivého toku od plošky $d\vec{S}_2$ dopadajúci na plošku $d\vec{S}_1$ nech možno opísať pomocou Lambertovho zákona (9.1.1),

$$d^2 J_{1,\text{in}} = \frac{M_2}{\pi} \cos(\theta) d\Omega dS_2$$

kde M_2 je intenzita vyžarovania plošky dS_2 a θ je uhol medzi normálou plošky $d\vec{S}_2$ a smerom $-\vec{e}$, t. j. $\cos(\theta) = -\frac{d\vec{S}_2}{dS_2} \cdot \vec{e}$. Priestorový uhol, cez ktorý dopadá žiarenie na plošku dS_1 , je daný $d\Omega = d\vec{S}_1 \cdot (-\vec{e})/R^2$. Preto dopadajúci žiarivý tok možno vyjadriť vzťahom

$$d^2 J_{1,\text{in}} = M_2 \frac{1}{\pi} \frac{(\vec{e} \cdot d\vec{S}_1)(\vec{e} \cdot d\vec{S}_2)}{R^2}.$$

Ak majú obe plochy – tá, od ktorej žiarenie prichádza, aj tá, na ktorú dopadá, konečné rozmery, a navyše vyžarovaná plocha má konštantnú intenzitu vyžarovania M_2 , získame často používaný vzťah pre dopadajúce žiarenie

$$J_{1,\text{in}} = F_{1,2} S_2 M_2, \quad F_{1,2} = \frac{1}{S_2 \pi} \iint \frac{(\vec{e} \cdot d\vec{S}_1)(\vec{e} \cdot d\vec{S}_2)}{R^2}, \quad (9.1.2)$$

kde $F_{1,2}$ predstavuje bezrozmerný geometrický faktor, po anglicky nazývaný *view factor*, ktorý udáva zlomok výkonu tepelného žiarenia uvoľneného z plochy S_2 a dopadajúceho na plochu S_1 , ak predpokladáme, že plocha S_2 žiari podľa Lambertovho zákona.

Podobne, zlomok energie žiarenia, ktoré je emitované plochou S_1 a dopadá na plochu S_2 , je analogicky dané vzťahom

$$J_{2,\text{in}} = F_{2,1} S_1 M_1.$$

Pomocou geometrických faktorov možno bilanciu toku energie žiarenia z plochy S_1 na plochu S_2 napísať v tvare

$$J_{2\leftarrow 1} = J_{2,\text{in}} - J_{1,\text{in}} = F_{2,1} S_1 (M_1 - M_2), \quad (9.1.3)$$

kde sme využili symetriu geometrických faktorov $F_{1,2} S_2 = F_{2,1} S_1$, vyplývajúcu z definície (9.1.2).

Ak sa uvažuje sústava viacerých plôch S_i , $i = 1, \dots, N$, potom celková energia žiarenia dopadajúca na i -tu plochu z ostatných bude

$$J_{i,\text{in}} = \sum_{j=1}^N F_{i,j} S_j M_j \quad (9.1.4)$$

čo možno napísať aj ako maticovú rovnicu

$$\mathbf{J}_{\text{in}} = \mathbf{F} \mathbf{J}_M \quad (9.1.5)$$

kde $\mathbf{J}_{\text{in}} = (J_{1,\text{in}}, J_{2,\text{in}}, \dots, J_{N,\text{in}})^T$, $\mathbf{J}_M = (S_1 M_1, S_2 M_2, \dots, S_N M_N)^T$, a \mathbf{F} je matica s prvkami $F_{i,j}$.

Geometrické faktory $F_{i,j}$ spĺňajú dve identity:

$$F_{i,j} S_j = F_{j,i} S_i, \quad \forall i, j, \quad (9.1.6)$$

$$\sum_{j=1}^N F_{j,i} = 1, \quad \forall i. \quad (9.1.7)$$

Prvá identita je dôsledkom definície (9.1.2), ktorá je symetrická vzhľadom na indexy až na veľkosť plochy v menovateli pred integrálom. Druhá je konštatovaním bilancie celkovej vyžiarenej energie z i -tej plochy, ktorá musí nevyhnutne dopadať na jednu z $j = 1, \dots, N$ plôch. Je dobré si uvedomiť, že aj $F_{i,i}$ môže byť vo všeobecnosti nenulový, ak je i -tá plocha konkávna.

Geometrické faktory sa využívajú aj v problémoch výmeny tepla tepelným žiarením pre reálne povrchy s emisiviou $\epsilon < 1$. Pre takéto povrchy dochádza nie len k emitovaniu tepelného žiarenia s intenzitou $M' = \epsilon M$, ale aj k rozptylu (odrazu) hustoty toku dopadajúceho žiarenia, ktoré je charakterizované koeficientom odrazu r . Na to, aby bolo možné použiť geometrické faktory (9.1.2), je nevyhnutné, aby povrchy vykazovali *difúzny* rozptyl. To znamená, že smerové rozloženie odrazeného žiarenia má rovnako ako v Lambertovom zákone „kosínusový tvar“, a to nezávisle od smerového rozloženia dopadajúceho žiarenia. Ak je táto podmienka splnená, môžeme používať podobné vzťahy, ako je napríklad rovnica (9.1.4)

$$J_{i,\text{in}} = \sum_{j=1}^N F_{i,j} J_{j,\text{out}}, \quad (9.1.8)$$

kde sme tepelné vyžarovanie absolútne čierneho povrchu $S_j M_j$ nahradili celkovým tokom energie od povrchu $J_{i,\text{out}}$, ktorý zahŕňa tak jeho tepelné vyžarovanie ako aj difúzny rozptyl dopadajúceho žiarenia.

Difúzny rozptyl predstavuje pomerne dobrý model pre mnohé matné povrchy. Na druhej strane, difúzny rozptyl opisuje diametrálne odlišný odraz žiarenia od povrchu, ako je z optiky dobre známy zrkadlový (spekulárny) odraz, pre ktorý platí Snellov zákon. K zrkadlovému odrazu dochádza pre veľmi hladké, a teda lesklé povrchy. Povrch vykazujúci difúzny rozptyl si môžeme predstaviť tak, že sa skladá z veľkého množstva mikroskopických rôzne orientovaných hladkých plôšok, ktorých neusporiadanosť vedie na uvádzané kosínusové rozloženie smerovej závislosti rozptylu dopadajúceho tepelného žiarenia.

9.2 Kirchhoffov zákon

Povrchy telies nevyžarujú ako ideálne čierne telesá, sú charakterizované emisíviou $\epsilon < 1$. Povrch, ktorý nie je absolútne čierny, absorbuje len istú časť dopadajúceho žiarenia, zvyšok odráža alebo prepušťa cez seba (a teda cez samotné teleso). Nech $dj_{in,\lambda}$ predstavuje množstvo energie dopadajúce na jednotkovú plochu povrchu za jednotku času v intervale vlnových dĺžok $(\lambda, \lambda+d\lambda)$. Bilancia energie dopadajúceho žiarenia vedie na jeho rozklad na žiarenie odrazené, absorbované a prechádzajúce:

$$dj_{in,\lambda} = dj_{r,\lambda} + dj_{a,\lambda} + dj_{t,\lambda} = (r_\lambda + a_\lambda + t_\lambda) dj_{in,\lambda}$$

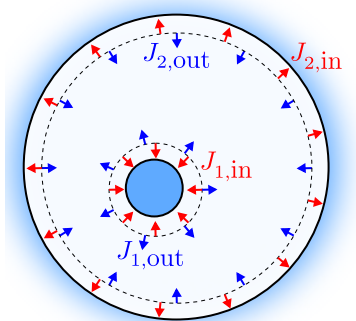
kde sme zaviedli spektrálne koeficienty odrazu $r_\lambda = dj_{r,\lambda}/dj_{in,\lambda}$, absorpcie $a_\lambda = dj_{a,\lambda}/dj_{in,\lambda}$ a transmisie $t_\lambda = dj_{t,\lambda}/dj_{in,\lambda}$. Z poslednej rovnice vyplýva $r_\lambda + a_\lambda + t_\lambda = 1$.

Kirchhoff ukázal, že pre tepelné žiarenie je koeficient absorpcie zhodný s emisíviou povrchu pomocou tejto úvahy. Teleso s teplotou T sa nachádza v kavitě, ktorej steny majú tiež teplotu T . Vzhľadom na rovnosť teplôt bude teleso a steny kavitě v termodynamickej rovnováhe, nezávisle od charakteru telesa. Ak má teleso absolútne čierny povrch, potom za jednotku času jednotkovou plochou teplne vyžaruje podľa Stefanovho–Boltzmannovho zákona energiu $j_{out} = M = \sigma_{SB}T^4$, respektíve, v intervale vlnových dĺžok $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ časť energie dM_λ , ktorej presný predpis je daný Planckovým zákonom [26]. Takéto isté množstvo energie $dj_{in} = dM_\lambda$ musí na čierne teleso dopadať od stien kavitě, a to v každom intervale vlnových dĺžok. Predstavme si, že zameníme teleso za iné, s identickou teplotou T a tvarom, ale povrchom, ktorého tepelné žiarenie dM'_λ bude pri tej istej teplote T slabšie ako žiarenie absolútne čierneho telesa. Pre takéto teleso zavádzame jeho *spektrálnu emisíviu*

$$\epsilon_\lambda = \frac{dM'_\lambda}{dM_\lambda} < 1, \quad (9.2.1)$$

ktorá bude už funkciou nie len teploty ale aj vlnovej dĺžky žiarenia. Aj takéto teleso musí byť v rovnováhe so stenami, a preto celková výmena energie telesa s kavitou v každom intervale vlnových dĺžok musí byť nulová. Na teleso od stien dopadá rovnaké množstvo energie ako v prvom prípade – dM_λ . Z neho zlomok $a_\lambda dM_\lambda$ sa absorbuje povrchom. Na druhej strane, z definície spektrálnej emisivity, množstvo emitovaného tepelného žiarenia telesom bude $\epsilon_\lambda dM_\lambda$. Nakoľko tieto dve množstvá musia byť v stave termodynamickej rovnováhy zhodné, musí platiť

$$\epsilon_\lambda = a_\lambda, \quad (9.2.2)$$



Obr. 9.3.1: Malé teleso v kavite. Čiarkované čiary zobrazujú myslené plochy tesne nad povrchom telesa ($i = 1$) alebo kavity ($i = 2$). Cez tieto plochy prechádza v smere od telesa alebo kavity žiarenie s celkovým tokom energie $J_{i,out}$ a naopak, na teleso dopadá celkový tok energie $J_{i,in}$. Výsledná bilancia toku energie z povrchu telesa/kavity je teda $J_{i,out} - J_{i,in}$.

t. j. spektrálna emisivita povrchu pre tepelné žiarenie s vlnovými dĺžkami $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ je zhodná s jeho koeficientom absorpcie pre takú istú teplotu. Toto predstavuje formuláciu Kirchhoffovho zákona pre tepelné žiarenie.

V infračervenej oblasti pevné látky typicky žiarenie absorbujú natolko intenzívne, že koeficient transmisie môžeme bežne považovať za nulový, $t_\lambda \approx 0$. Preto často používame zjednodušený vzťah $a_\lambda + r_\lambda = 1$, ktorý vzhľadom na Kirchhoffov zákon možno napísať aj v tvare:

$$\epsilon_\lambda + r_\lambda = 1. \quad (9.2.3)$$

Rovnaký výsledok by sme dostali, ak by sme uvažovali celkový koeficient absorpcie a celkovú emisivitu (6.2.9), nerozloženú na intervaly vlnových dĺžok tepelného žiarenia.

9.3 Prenos tepla radiáciou pre teleso v kavite

Vypočítame celkový tok tepelného žiarenia z reálneho povrchu malého telesa s teplotou T_1 , veľkosťou povrchu S_1 a emisivitou ϵ_1 , ktoré sa nachádza v kavite s teplotou T_2 , emisivitou ϵ_2 a celkovou plochou $S_2 \gg S_1$.

Nech $J_{1,out}$ predstavuje celkové množstvo energie prenášané žiarením od povrchu telesa, $J_{1,in}$ celkové množstvo energie prenášané žiarením k povrchu telesa, a s podobným významom si zavedieme aj veličiny $J_{2,out}$ a $J_{2,in}$ pre vnútorný povrch kavity. Z časti 9.1 vieme, že súvis medzi týmito veličinami

je daný maticou geometrických faktorov

$$\mathbf{J}_{\text{in}} = \mathbf{F} \mathbf{J}_{\text{out}}. \quad (9.3.1)$$

Pre teleso v kavite nájdeme použitím elementárnych úvah a vzťahov (9.1.6) a (9.1.7):

$$F_{1,1} = 0, F_{2,1} = 1, F_{1,2} = \frac{S_1}{S_2}, F_{2,2} = 1 - F_{1,2} \quad (9.3.2)$$

Maticu \mathbf{F} teda môžeme považovať za známu.

Kým rovnice pre rozptyl sa najľahšie formulujú pre celkový dopadajúci a odchádzajúci tok energie žiarenia, na výpočet okrajovej podmienky nás zaujíma ich rozdiel – celkový tok energie žiarenia z plochy S_j :

$$J_{Q,i} = J_{i,\text{out}} - J_{i,\text{in}}, \quad (9.3.3)$$

pre ktoré pomocou (9.3.1) dostaneme

$$\mathbf{J}_Q = (\mathbf{1} - \mathbf{F}) \mathbf{J}_{\text{out}}. \quad (9.3.4)$$

Na základe Stefanovho-Boltzmannovho a Kirchhoffovho zákona ($r = 1 - \epsilon$, transmisiu považujeme za nulovú) môžeme písať:

$$J_{1,\text{out}} = \epsilon_1 M_1 S_1 + (1 - \epsilon_1) J_{1,\text{in}} \quad (9.3.5)$$

$$J_{2,\text{out}} = \epsilon_2 M_2 S_2 + (1 - \epsilon_2) J_{2,\text{in}} \quad (9.3.6)$$

Tieto rovnice tiež upravíme pomocou definície (9.3.3):

$$J_{Q,1} = \epsilon_1 M_1 S_1 - \epsilon_1 J_{1,\text{in}} \quad (9.3.7)$$

$$J_{Q,2} = \epsilon_2 M_2 S_2 - \epsilon_2 J_{2,\text{in}} \quad (9.3.8)$$

(9.3.7) a (9.3.8) si vyjadríme $J_{i,\text{in}}$ pomocou $J_{i,\text{out}}$ podľa (9.3.3), aby neznámymi veličinami vystupujúcimi v rovniciach boli len \mathbf{J}_Q a \mathbf{J}_{out} :

$$J_{Q,1} = \epsilon_1 M_1 S_1 - \epsilon_1 (J_{1,\text{out}} - J_{Q,1}), \quad (9.3.9)$$

$$J_{Q,2} = \epsilon_2 M_2 S_2 - \epsilon_2 (J_{2,\text{out}} - J_{Q,2}), \quad (9.3.10)$$

čo možno zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \left(-1 + \frac{1}{\epsilon_i}\right) J_{Q,i} &= M_i S_i - J_{i,\text{out}} \\ J_{i,\text{out}} &= \left(1 - \frac{1}{\epsilon_i}\right) J_{Q,i} + M_i S_i \end{aligned}$$

alebo maticovo

$$\mathbf{J}_{\text{out}} = \mathbf{K}\mathbf{J}_Q + \mathbf{J}_M \quad (9.3.11)$$

kde

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\epsilon_1} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{\epsilon_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_M = \begin{pmatrix} M_1 S_1 \\ M_2 S_2 \end{pmatrix}.$$

Dosadením do (9.3.4) a úpravou nakoniec nájdeme

$$\mathbf{J}_Q = (\mathbf{1} - \mathbf{F})(\mathbf{K}\mathbf{J}_Q + \mathbf{J}_M) \quad (9.3.12)$$

$$[\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{F})\mathbf{K}]\mathbf{J}_Q = (\mathbf{1} - \mathbf{F})\mathbf{J}_M \quad (9.3.13)$$

$$\mathbf{J}_Q = [(\mathbf{1} - \mathbf{F})^{-1} - \mathbf{K}]^{-1} \mathbf{J}_M \quad (9.3.14)$$

Posledný vzťah predstavuje všeobecný výsledok. Ak by sme uvažovali $i = 1, \dots, N$ povrchov s rôznymi teplotami a emisivitami, tak tieto rovnice obsahujú matice $N \times N$ a je nevyhnutné počítať tam nachádzajúce sa inverzné matice. Našťastie, v aktuálne riešenom probléme telesa v kavitě to nie je potrebné, stačí ak vyjdeme priamo z prvého riadku maticovej rovnice (9.3.12), ktorá po rozpísaní dá:

$$J_{Q,1} = (1 - F_{11}) \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1} J_{Q,1} - F_{12} \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2} J_{Q,2} + (1 - F_{11}) M_1 S_1 - F_{12} M_2 S_2.$$

V prípade len dvoch telies platí $J_{Q,1} = -J_{Q,2}$, pre zvolenú kavitu $F_{11} = 0$ a $F_{12} = S_1/S_2$, a preto

$$J_{Q,1} = \frac{\epsilon_1(M_1 - M_2)S_1}{1 + \frac{S_1 \epsilon_1}{S_2 \epsilon_2}(1 - \epsilon_2)}.$$

Tento výsledok môžeme napísať aj v tvare

$$J_{Q,1} = S_1 \epsilon'_1 \sigma_{\text{SB}} (T_1^4 - T_2^4), \quad \epsilon'_1 = \frac{\epsilon_1}{1 + \frac{S_1 \epsilon_1}{S_2 \epsilon_2}(1 + \epsilon_2)}. \quad (9.3.15)$$

V limite veľkej kavitě platí $S_1/S_2 \rightarrow 0$ z čoho vyplýva $\epsilon' \rightarrow \epsilon_1$, a teda nachádzame výsledok (6.2.14) z príkladu 6.2.1. Vidíme, že vo všeobecnosti výsledok (6.2.14) nie je platný a je potrebné použiť modifikovanú emisivitu (9.3.15). Argument v príklade 6.2.1 zlyháva v tom, že ak by sme vychádzali len z neho, tak k $J_{Q,\text{in}}$ by bolo možné vždy pridať ľubovoľnú funkciu rozdielu $T - T_\infty$.

Úloha 9.3.1 Nech rovinná stena má teplotu T_1 a emisivitu ϵ_1 a s ňou paralelná stena má teplotu T_2 a emisivitu ϵ_2 . Aká bude hustota toku energie tepelného žiarenia medzi stenami?

Riešenie:

$$\begin{aligned} j_{1,\text{out}} &= \epsilon_1 M_1 + (1 - \epsilon_1) j_{1,\text{in}} \\ j_{2,\text{out}} &= \epsilon_2 M_2 + (1 - \epsilon_2) j_{2,\text{in}} \end{aligned}$$

Pre toky medzi stenami pritom platí

$$\begin{aligned} j_{1,\text{in}} &= j_{2,\text{out}} \\ j_{2,\text{in}} &= j_{1,\text{out}} \\ j_Q &= j_{1,\text{out}} - j_{1,\text{in}} = -j_{2,\text{out}} + j_{2,\text{in}} \end{aligned}$$

Dosadením a úpravami nájdeme:

$$j_Q = \frac{M_1 - M_2}{1/\epsilon_2 + 1/\epsilon_1 - 1}$$

Úloha 9.3.2 Nech rovinná stena má teplotu T_1 a emisivitu ϵ_1 . Jej tepelné žiarenie chceme odtieniť paralelnou stenou s emisivitou ϵ_2 . (1) Aká bude hustota toku energie tepelného žiarenia za tieniacou stenou? (2) Aká bude teplota tieniacej steny?

Riešenie: (1) Hustotu toku žiarivej energie prestupujúcu od steny smerom k tienidlu is označíme $j_{1,\text{out}}$, smerom od tienidla k stene $j_{2a,\text{out}}$ a na druhej strane od tienidla smerom von $j_{2b,\text{out}}$. Analogicky hustoty toku žiarivej energie smerom k stene a k tienidlu z vnútornej a vonkajšej strany s indexom „in“. Nakoniec používame aj označenie pre intenzitu vyžarovania $M_i = \sigma_{\text{SB}} T_i^4$. Pre hustoty žiarivej energie prestupujúce od jednotlivých povrchov píšeme

$$\begin{aligned} j_{1,\text{out}} &= \epsilon_1 M_1 + (1 - \epsilon_1) j_{1,\text{in}} \\ j_{2a,\text{out}} &= \epsilon_2 M_2 + (1 - \epsilon_2) j_{2a,\text{in}} \\ j_{2b,\text{out}} &= \epsilon_2 M_2 = j_Q = j_{1,\text{out}} - j_{1,\text{in}} = -j_{2a,\text{out}} + j_{2a,\text{in}} \end{aligned}$$

Pre toky medzi stenou a tienidlom

$$\begin{aligned} j_{1,\text{in}} &= j_{2a,\text{out}} \\ j_{2a,\text{in}} &= j_{1,\text{out}} \end{aligned}$$

Dosadením a úpravami nájdeme:

$$j_Q = \frac{\epsilon_1 M_1}{1 + \epsilon_1(2/\epsilon_2 - 1)} \leq \epsilon_1 M_1$$

a teda naozaj dochádza k tineniu pre ľubovoľné ϵ_1, ϵ_2 . Maximálny tieniaci účinok dostaneme pre $\epsilon_2 \rightarrow 0$, čo by nás nemalo prekvapovať.

(2)

$$\epsilon_2 M_2 = j_Q = \frac{\epsilon_1 M_1}{1 + \epsilon_1(2/\epsilon_2 - 1)},$$

a teda konečné vyjadrenie pre teplotu tienidla nachádzame výsledok

$$T_2 = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1(2 - \epsilon_2)} \right)^{1/4} T_1.$$

Kapitola 10

Metóda konečných prvkov

Akýkoľvek realistickejší model šírenia tepla vyžaduje numerické riešenie diferenciálnej rovnice. Metóda konečných prvkov (MKP) je numerickou metódou riešenia diferenciálnych rovníc zvlášť vhodnou pre komplikované trojrozmerné geometrie skladajúce sa z telies rôznych tvarov a z rôznych materiálov. Na začiatok ukážeme, ako je MKP matematicky sformulovaná pre stacionárnu jednorozmernú úlohu vedenia tepla. Neskôr uvedieme rozšírenie MKP pre dvojrozmerné problémy a prechodné deje. Po preštudovaní týchto častí čitateľ nadobudne dobrú predstavu o MKP na to, aby vedel posúdiť a porozumieť správaniu sa MKP výpočtov pri ich využívaní pomocou voľne šíriteľných (napr. ELMER, OpenFOAM) alebo komerčných (napr. ANSYS, COMSOL Multiphysics) programov. Táto kapitola vychádza z prednášok prof. Gilberta Stranga [28], voľne prístupných na internete vďaka projektu MIT OpenCourseWare.

10.1 Slabé riešenie v 1D

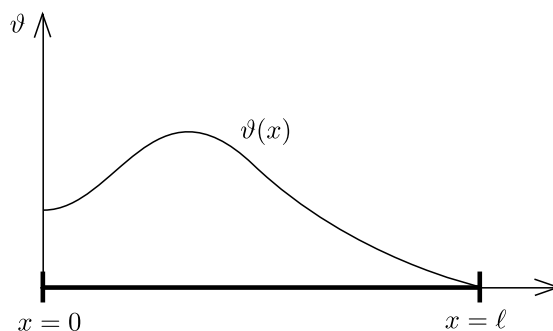
MKP formuláciu objasníme na úlohe stacionárneho prestupu tepla v jednom rozmere, riešenej na konečnej dĺžke ℓ (Obr. 10.1.1),

$$-\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{d}{dx} \vartheta(x) \right) = \sigma_u(x) \quad (10.1.1)$$

s predpísanými okrajovými podmienkami

$$\left. \frac{d}{dx} \vartheta \right|_{x=0} = 0 \quad \text{a} \quad \vartheta(\ell) = 0. \quad (10.1.2)$$

Koeficient tepelnej vodivosti aj produkciu vnútornej energie budeme uvažovať ako známe funkcie polohy. Takáto úloha zapísaná pomocou diferenciálnej



Obr. 10.1.1: Hľadané riešenie stacionárneho prestupu tepla v jednom rozmere s okrajovou podmienkou na nulový tok vľavo a nulovú teplotu vpravo.

rovnice druhého rádu sa v teórii diferenciálnych rovníc nazýva *silná formulácia* úlohy prestupu tepla a riešenie $\vartheta(x)$ sa analogicky nazýva *silné riešenie*.

Pri hľadaní aproximácie silného riešenia sa vychádza zo *slabej formulácie*. Túto získame uvažovaním vhodnej množiny *testovacích funkcií* $v(x)$. Pre násobením rovnice (10.1.1) s $v(x)$, potom jej integrovaní cez interval $(0, \ell)$ a použitím integrovania per-partes na jej ľavej strane nájdeme

$$\begin{aligned} - \int_0^\ell \frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{d}{dx} \vartheta(x) \right) v(x) dx &= \int_0^\ell \sigma_u(x) v(x) dx \\ - \left[\lambda(x) \left(\frac{d}{dx} \vartheta(x) \right) v(x) \right]_0^\ell + \int_0^\ell \lambda(x) \left(\frac{d}{dx} \vartheta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} v(x) \right) dx & \\ &= \int_0^\ell \sigma_u(x) v(x) dx \quad (10.1.3) \end{aligned}$$

Vďaka okrajovým podmienkam je výraz v hranatých zátvorkách nulový. Výsledný vzťah predstavuje slabú formuláciu prestupu tepla,

$$\int_0^\ell \lambda(x) \left(\frac{d}{dx} \vartheta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} v(x) \right) dx = \int_0^\ell \sigma_u(x) v(x) dx \quad (10.1.4)$$

Od slabého riešenia $\vartheta(x)$ nevyžadujeme splnenie rovnice (10.1.1) v každom bode $x \in (0, \ell)$, ale len platnosť rovníc (10.1.4) pre každú testovacú funkciu $v(x)$.

Všimnime si, že rovnica (10.1.4) potrebuje existenciu len prvej derivácie hľadaného slabého riešenia $\vartheta(x)$. Tiež si uvedomme, že čím je množina testovacích funkcií chudobnejšia, tým viac slabých riešení úlohy bude zrejme

existovať, t. j. riešenie nebude jednoznačné. Je preto úzky súvis medzi množinou testovacích funkcií a množinou riešení slabej úlohy. Bez toho, aby sme vstupovali na pole matematickej teórie diferenciálnych rovníc, sa obmedzme na intuitívne zrejmé konštatovanie, že čím je bohatšia množina testovacích funkcií, tým bližšie sú slabé riešenia k jednoznačnému riešeniu silnej formulácie úlohy vedenia tepla. Pojmy „bohatosti množiny funkcií“ a „blízkosti dvoch funkcií“ sa presne definujú v rámci funkcionálnej analýzy¹.

10.2 Rozvoj do konečnej bázy

Pri hľadaní slabého riešenia sa používa Galerkinova metóda, ktorá predstavuje jeho aproximáciu pomocou konečného súčtu známych *bázových funkcií* prenásobených s neznámymi koeficientami U_i ,

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= U_0\phi_0(x) + U_1\phi_1(x) + \dots + U_{N-1}\phi_{N-1}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} U_i\phi_i(x). \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

Množinu N funkcií $\{\phi_i(x)\}_{i=0}^{N-1}$ nazývame *bázou*.

Takýto postup môžeme motivovať napríklad podobnosťou s konečným Taylorovým rozvojom funkcie, kde bázou sú homogénne polynómy stupňa i , x^i ,

$$\vartheta(x) \approx \sum_{i=0}^{N-1} c_i x^i,$$

alebo podobnosťou s konečným Fourierovým radom,

$$\vartheta(x) \approx a_0 + \sum_{i=1}^N \left\{ a_i \cos\left(\frac{2\pi}{\ell} ix\right) + b_i \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} ix\right) \right\},$$

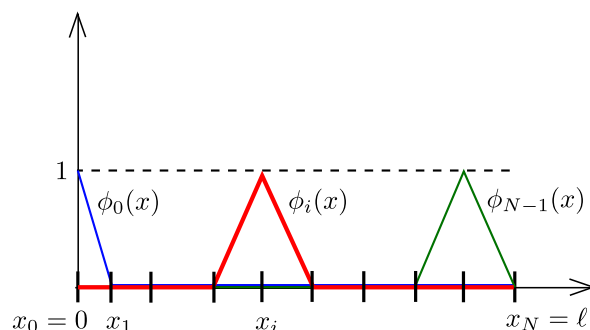
kde bázou tvoria periodické funkcie $\sin()$, $\cos()$ a konštantná funkcia 1.

V prípade MKP sa používajú také bázové funkcie $\phi_i(x)$, ktoré sú nenulové len v malej oblasti priestoru. Okrem toho spĺňajú aj ďalšie vlastnosti, ktoré sú výhodné pre numerické hľadanie slabého riešenia. Pre ich zavedenie sa vrátíme k pôvodnej úlohe vedenia tepla na intervale $x \in (0, \ell)$. Na intervale

¹V rámci funkcionálnej analýzy množina testovacích funkcií tvorí Hilbertov priestor, v ktorom je vhodne definovaný skalárny súčin dvoch funkcií a prostredníctvom neho aj ich „vzdialenosť“. Pomocou tejto „vzdialenosti“ dvoch funkcií možno potom posudzovať rozdiel medzi riešením s konečnou bázou, bázou celého uvažovaného Hilbertovho priestoru, ako aj rozdiel medzi slabým a silným riešením.

zvolíme $N + 1$ uzlov $x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_N = \ell$ (Obr. 10.2.1). Ku každému uzlu priradíme po častiach *lineárnu* bázovú funkciu danú predpisom

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{-x+x_{i+1}}{-x_i+x_{i+1}} & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & x \in (0, x_{i-1}) \cup (x_{i+1}, \ell) \end{cases} \quad (10.2.2)$$



Obr. 10.2.1: Interval $x \in (0, \ell)$ je rozdelený $N - 1$ vnútornými uzlami na N intervalov. Ku každému uzlu priradíme bázovú funkciu, ktorá nadobúda jednotkovú hodnotu priamo nad týmto uzlom. Na obrázku sú zobrazené len tri bázové funkcie.

Takto zavedené funkcie $\phi_i(x)$ nadobúdajú v uzle x_i hodnotu jedna a vo všetkých ostatných uzloch sú nulové. Vďaka tejto vlastnosti majú koeficienty rozvoja U_i význam hodnoty teploty v tomto uzle,

$$\vartheta(x_i) = \sum_{j=0}^{N-1} U_j \phi_j(x_i) = \sum_{j=0}^{N-1} U_j \delta_{i,j} = U_i.$$

Bázovú funkciu patriacu poslednému uzlovému bodu $x_N = \ell$ zatiaľ nevyužívame. Týmto automaticky zabezpečíme splnenie okrajovej podmienky v $\vartheta(\ell) = 0$. Okrajová podmienka na nulový tok v $x_0 = 0$ bude splnená automaticky. Preto sa niekedy okrajová podmienka na nulový tok nazýva aj prirodzená okrajová podmienka – je splnená prirodzene, bez dodatočných algebraických úprav.

10.3 Formulácia algebraických rovníc

Pre nájdenie N koeficientov rozvoja (10.2.1) je potrebné zostaviť N rovníc. Tieto nájdeme dosadením tohto rozvoja do rovnice (10.1.4) s využitím N rôznych testovacích funkcií. V MKP sa testovacie funkcie volia totožné s báзовými funkciami $\phi_i(x)$. Pre $v(x) = \phi_i(x)$ nachádzame

$$\int_0^\ell \lambda(x) \left(\frac{d}{dx} \sum_j U_j \phi_j(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \phi_i(x) \right) dx = \int_0^\ell \sigma_u(x) \phi_i(x) dx, \\ i = 0, \dots, N-1$$

čo možno zapísať v tvare

$$\sum_{j=0}^{N-1} K_{ij} U_j = F_i, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (10.3.1)$$

kde

$$K_{ij} = \int_0^\ell \lambda(x) \left(\frac{d}{dx} \phi_i(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \phi_j(x) \right) dx \quad (10.3.2)$$

a

$$F_i = \int_0^\ell \sigma_u(x) \phi_i(x) dx. \quad (10.3.3)$$

N rovníc 10.3.1 možno zapísať aj v maticovom tvare

$$KU = F \quad (10.3.4)$$

kde prvky matice K sú dané predpisom (10.3.2), U je stĺpcový vektory neznámych koeficientov U_i a F stĺpcový vektor pravých strán daných predpisom (10.3.3). Nájdenie aproximácie slabého riešenie vyžaduje nájdenie riešenia pre stĺpcový vektor U takejto algebraickej rovnice. Numericky možno riešiť takéto úlohy pre veľmi veľký počet uzlov.

Príklad 10.3.3 Nájdite prvky matice K_{00} , K_{01} a K_{11} , ak tepelná vodivosť je konštantná, $x_1 - x_0 = \Delta x_0$ a $x_2 - x_1 = \Delta x_1$

Riešenie: Zo vzťahu (10.3.2) nájdeme

$$K_{00} = \int_0^\ell \lambda \left(\frac{d}{dx} \phi_0(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \phi_0(x) \right) dx.$$

Podľa (10.2.2) je derivácia $\phi_0(x)$ nenulová len na intervale $(0, \Delta x_0)$ a rovná sa $-1/\Delta x_0$, a preto

$$K_{00} = \int_0^{\Delta x_0} \lambda \frac{(-1)}{\Delta x_0} \frac{(-1)}{\Delta x_0} dx = \frac{\lambda}{\Delta x_0}.$$

Podobne, podľa (10.2.2) je derivácia $\phi_1(x)$ na intervale $(0, \Delta x_0)$ rovná $+1/\Delta x_0$. Hoci je derivácia $\phi_1(x)$ nenulová ešte aj na intervale $(x_1, x_1 + \Delta x_1)$, táto hodnota neovplyvní vyčíslenie prvku K_{01} pretože derivácia $\phi_0(x)$ je už na tomto intervale nulová. Preto

$$K_{01} = \int_0^{\Delta x_0} \lambda \frac{(-1)}{\Delta x_0} \frac{(+1)}{\Delta x_0} dx = -\frac{\lambda}{\Delta x_0}.$$

Nakoniec pri výpočte prvku K_{11} uvažujeme, že derivácia $\phi_1(x)$ je nenulová na intervaloch $(0, \Delta x_0)$ aj $(x_1, x_1 + \Delta x_1)$,

$$K_{11} = \int_0^{\Delta x_0} \lambda \frac{(+1)}{\Delta x_0} \frac{(+1)}{\Delta x_0} dx + \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x_1} \lambda \frac{(-1)}{\Delta x_1} \frac{(-1)}{\Delta x_1} dx = \frac{\lambda}{\Delta x_0} + \frac{\lambda}{\Delta x_1}.$$

Príklad 10.3.4 Rozpíšte maticovú rovnicu (10.3.4) pre prípad $N = 6$ pomocou výsledkov z predchádzajúceho príkladu, pričom navyše predpokladajte, že $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_i = \Delta x$.

Riešenie:

$$\frac{\lambda}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}$$

Úloha 10.3.5 Uvažujte prestup tepla úsečkou s dĺžkou ℓ , ktorú rozdelte na 8 rovnako dlhých elementov s 9 uzlami $x_i = (\ell/8)i$ s $i = 0, \dots, 8$.

Ak rovnica prestupu tepla má generovanie tepla dané predpisom

$$\sigma_u = \begin{cases} 4\dot{Q}/\ell & \ell/2 < x < (3/4)\ell \\ 0 & \text{v ostatnom prípade} \end{cases}$$

aká bude hodnota $i = 4$ -tej zložky stĺpcového vektora F , t. j. F_4 ?

10.4 Zadanie okrajových podmienok v MKP

Pri predchádzajúcej analýze sme sa obmedzili na špeciálnu voľbu okrajových podmienok (10.1.2). Ich dôsledkom bolo, že okrajové členy integrácie per partes v rovnici (10.1.3) boli nulové. V tejto časti vysvetlíme, ako možno implementovať aj ostatné druhy okrajových podmienok, s ktorými sa pri vedení tepla stretávame.

Ako prvú modifikáciu budeme uvažovať predpísanie nenulového toku v $x = 0$ a nulovú teplotu v $x = \ell$,

$$j_Q(0) = -\lambda \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_0 = A \neq 0, \quad \vartheta(\ell) = 0. \quad (10.4.1)$$

Okrajový príspevok pri dolnej hranici integrovania v rovnici (10.1.3) je teraz nenulový a presunieme ho na pravú stranu,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \lambda(x) \left(\frac{d}{dx} \vartheta(x) \right) \left(\frac{d}{dx} v(x) \right) dx &= \int_0^\ell \sigma_u(x) v(x) dx - \lambda(0) \left. \frac{d}{dx} \vartheta(x) \right|_0 v(0) \\ &= \int_0^\ell \sigma_u(x) v(x) dx + Av(0) \end{aligned}$$

Teplotu hľadáme v tvare rozvoja do konečnej bázy $\vartheta(x) = \sum_{j=0}^{N-1} U_j \phi_j(x)$ a za testovaciu funkciu postupne dosadíme jednotlivé bázové funkcie $\phi_i(x)$, $i = 0, \dots, N-1$, čím získame sústavu N rovníc

$$\sum_{j=0}^{N-1} K_{ij} U_j = F_i + A\phi_i(0). \quad (10.4.2)$$

kde $\phi_i(0) = \delta_{i,0}$, takže tento výraz je nenulový len v prvej rovnici, zodpovedajúcej $i = 0$. Vidíme, že nenulová hodnota toku predstavuje prídavok k pravej strane maticovej rovnice, podobne ako zdroje produkcie vnútornej energie F_i . V prípade predpísaného toku tepla A je tento príspevok nenulový len na uzle $i = 0$, ako by sme aj intuitívne očakávali.

Ako druhý prípad rozoberieme situáciu s predpísaným teplotami na oboch hraniciach, t. j.

$$\vartheta(0) = B, \quad \vartheta(\ell) = C. \quad (10.4.3)$$

Pretože teplota v $x = \ell$ môže byť nenulová, je nevyhnutné rozšíriť bázu testovacích funkcií o $\phi_N(x)$, definovanú podobne ako $\phi_0(x)$, len v uzle $x_N = \ell$.

Teplotu hľadáme v tvare konečného radu s $N + 1$ členmi,

$$\vartheta(x) = \sum_{j=0}^N U_j \phi_j(x). \quad (10.4.4)$$

Koeficienty $U_0 = B$ a $U_N = C$ ale nepredstavujú neznáme, ale známe (zadané) hodnoty, a preto na určenie koeficientov U_j , $j = 1, \dots, N-1$ potrebujeme zostaviť len $N-1$ lineárne nezávislých rovníc. Tieto nájdeme tak, že testovaciu funkciu v (10.1.3) postupne volíme funkcie $\phi_i(x)$, $i = 1, \dots, N-1$,

$$\sum_{j=0}^N K_{ij}U_j = F_i, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (10.4.5)$$

$$(10.4.6)$$

Zo súčtu na ľavej strane oddelíme „známe“ koeficienty U_0 a U_N od neznámych,

$$K_{i0}B + \sum_{j=1}^{N-1} K_{ij}U_j + K_{iN}C = F_i \quad (10.4.7)$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} K_{ij}U_j = F_i - K_{i0}B - K_{iN}C \quad (10.4.8)$$

Podobne ako v rovnici (10.4.2), aj v prípade Dirichletých okrajových podmienok vystupujú predpísané hodnoty teploty v pozícií zdrojov na pravej strane maticovej rovnice pre neznáme koeficienty U_i , $i = 1, \dots, N-1$.

Hraničné príspevky z integrácie per-partes v (10.1.3) v týchto rovniciach nevystupujú, nakoľko tu využívané testovacie funkcie sú v hraničných uzloch nulové: $\phi_i(0) = 0$ a $\phi_i(\ell) = 0$ pre $i = 1, \dots, N-1$

Nakoniec sa pozrieme na implementáciu konvektívnej okrajovej podmienky, napríklad v $x = 0$,

$$-\lambda \left. \frac{d\vartheta}{dx} \right|_0 = D\vartheta(0) + A. \quad (10.4.9)$$

Koeficient D predstavuje koeficient prestupu tepla a zvyčajne ho označujeme α . Podobne ako v prípade predpísania nenulového toku v $x = 0$ nájdeme sústavu rovníc,

$$\sum_{j=0}^{N-1} K_{ij}U_j = F_i + (A + D\vartheta(0))\phi_i(0).$$

Využijeme vzťahy $\vartheta(0) = U_0$ a $\phi_i(0) = \delta_{i0}$ a uvedomíme si, že koeficient U_0 je neznámy a vyskytuje sa už aj na ľavej strane rovnice vrámci maticového násobenia. Preto výraz $D\vartheta(0)\phi_i(0) = DU_0\delta_{i0} = \sum_{j=0}^{N-1} D\delta_{i0}\delta_{ij}U_j$ pridáme k matici K_{ij} a získame tak konečné algebraické rovnice,

$$\sum_{j=0}^{N-1} \tilde{K}_{ij}U_j = F_i + A\delta_{i0}, \quad \tilde{K}_{ij} = K_{ij} - D\delta_{i0}\delta_{ij}. \quad (10.4.10)$$

Vidíme teda, že všetky okrajové podmienky, s ktorými sme sa stretli, možno jednoducho preformulovať na úlohu riešenia N alebo $N - 1$ lineárnych algebraických rovníc v tvare

$$\sum_j K_{ij} U_j = F_i, \quad (10.4.11)$$

ktorých riešenie vieme formálne zapísať pomocou inverznej matice

$$U_i = \sum_j K_{ij}^{-1} F_j. \quad (10.4.12)$$

Typicky sa pri numerickom riešení nehľadá inverzná matica, ale riešenie U_i konštruujeme pomocou *iteračných metód*. Tieto, na rozdiel od inverzie matice, sú použiteľné aj pre veľmi veľké počty uzlov N .

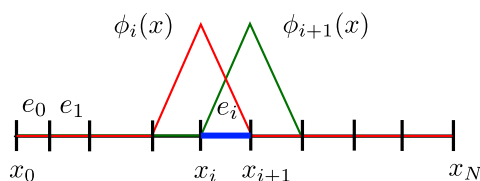
Úloha 10.4.6 Prečo nemožno v stacionárnych 1D úlohách uvažovať dve nezávislé okrajové podmienky na tok v $x = 0$ a $x = \ell$?

Pomôcka: Návod na odpoveď je ukrytý na konci diskusie Neumannovej okrajovej podmienky v časti 6.2.

10.5 Elementárna matica K

Ako názov metódy konečných prvkov naznačuje, jej kľúčovou ingredienciou je určitý konečný prvok, ktorý budeme nazývať *element* (z angličtiny). V prípade 1D úloh sú elementami intervaly, na ktoré je rozdelená oblasť riešenia úlohy vedenia tepla. V prípade 2D úloh sú nimi plošné útvary, napríklad trojuholníky a v prípade 3D úloh objemové telesá, napríklad štvorsteny. Množina všetkých uvažovaných elementov pokrýva celú oblasť, na ktorej chceme úlohu riešiť. Veľmi dôležitou a výhodnou črtou metódy konečných prvkov je, že jednotlivé elementy môžu byť rôzne veľké. V oblasti, kde sa teplotné pole mení pomaly, je postačujúce voliť väčšie elementy, v oblastiach, kde dochádza k rýchlej priestorovej zmene teploty, musíme naopak voliť malé elementy na získanie dostatočne presných výsledkov. Okrem toho, možnosť voľby veľkosti a tvaru elementov umožňuje pokryť aj geometricky nepravidelné oblasti a hranice, ktoré sú potrebné pre realistické modely simulovaných úloh. Toto je veľkou výhodou MKP pre výpočty v inžinierskej praxi.

Množina uzlov, t. j. všetky vrcholy elementov pre danú geometriu úlohy predstavuje výpočtovú sieť. Pre geometricky skonštruovanú sieť modelu je nevyhnutné zostaviť maticu K_{ij} , kde indexy i a j prebiehajú cez všetky uzly siete. V tejto kapitole objasníme princíp takejto konštrukcie pre 1D úlohy.



Obr. 10.5.1: Elementy označené indexom e_i pokrývajú celú oblasť riešenia. V prípade 1D úloh môžeme každému uzlu priradiť nasledujúci element, t. j. $e_i = i$, no vo vyšších dimenziách už takéto priradenie nie je možné. Napriek tomu môžeme vždy indexovať elementy pomocou zvoleného usporiadania a odkazovať na ne všeobecným indexom e , ktorý ale už nemusí byť jednoznačnou funkciou indexu uzlov. Na vybranom elemente sú nenulové len tie bázové funkcie, ktoré vo vrcholoch elementu nadobúdajú jednotkovú hodnotu. V 1D prípade sú to len dve lineárne funkcie.

V rovnici 10.3.2 sme našli všeobecné vyjadrenie pre maticu K_{ij} ,

$$K_{ij} = \int_0^\ell \lambda(x) \left(\frac{d}{dx} \phi_i(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \phi_j(x) \right) dx.$$

Integrovanie vyjadríme ako súčet konečných integrálov cez jednotlivé elementy,

$$K_{ij} = \sum_n K_{ij}^{e_n} \quad (10.5.1)$$

$$K_{ij}^{e_n} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \lambda(x) \left(\frac{d}{dx} \phi_i(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \phi_j(x) \right) dx. \quad (10.5.2)$$

$K_{ij}^{e_n}$, príspevok k matici K_{ij} od elementu e_n , je nenulový len pre malý počet uzlov/prvkov výslednej matice. Konkrétne, v 1D prípade je pre element e_n , t. j. interval (x_n, x_{n+1}) , nenulový len príspevok pre bázové funkcie s indexom i (alebo j) rovným n alebo $n + 1$.

Pre jednoduchší zápis nenulových príspevkov si tieto dva indexy zapíšeme pomocou *lokálneho indexu* uzlov elementu e_n , α . Lokálny index v 1D nadobúda len dve hodnoty, $\alpha = 0$ a 1 , pričom na elemente e_n ich priradíme globálnemu indexu uzlov i pomocou predpisu

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pre } i = n \\ 1 & \text{pre } i = n + 1 \end{cases} \quad (10.5.3)$$

Pomocou lokálneho indexu uzlov môžeme zapísať príspevok k matici K_{ij}

v tvare 2×2 elementárnej matice

$$K_{\alpha\beta}^{e_n} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \lambda(x) \left(\frac{d}{dx} \phi_{\alpha}^e(x) \right) \left(\frac{d}{dx} \phi_{\beta}^e(x) \right) dx, \quad (10.5.4)$$

kde bázové funkcie indexované lokálnym indexom majú na uvažovanom elemente tvar

$$\phi_{\alpha=0}^e(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, \quad (10.5.5)$$

$$\phi_{\alpha=1}^e(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (10.5.6)$$

V takomto zápise je výpočet elementárnych matíc priamočiary a dokonca aj analyticky vyčísliteľný, pokiaľ poznáme primitívnu funkciu k funkcii tepelnej vodivosti.

Po vyčíslení elementárnych matíc pre všetky elementy úlohy je potrebné ich spočítať podľa rovnice (10.5.1). Pri postupnom prechádzaní cez všetky prvky matice $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, i$ (stačí vyčísliť spodnú trojuholníkovú časť, lebo matica K_{ij} je vždy symetrická), ku každej kombinácii i, j prechádzame cez všetky elementy e_n , pričom na základe priradenia lokálnych indexov ku globálnym

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pre } i = n \\ 1 & \text{pre } i = n + 1 \end{cases} \quad (10.5.7)$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{pre } j = n \\ 1 & \text{pre } j = n + 1 \end{cases} \quad (10.5.8)$$

identifikujeme potrebný príspevok. Ak vyššie uvedené priradenie neurčí pre oba lokálne indexy hodnotu 0 alebo 1, potom aktuálne uvažovaný element n neprispieva k prvku ij celkovej matice K_{ij} a môžeme prejsť na nasledujúci element.

Kompozícia celkovej matice z elementárnych matíc sa môže zdať v najjednoduchšom 1D prípade ako zbytočné formalizovanie, no v prípade dvoch a troch dimenzií výrazne zjednodušuje numerickú implementáciu MKP.

Úloha 10.5.7 Ukážte, že elementárna matica pre každý interval z príkladu 10.3.4 má rovnaký tvar

$$\mathbf{K}^e = \frac{\lambda}{\Delta x} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha 10.5.8 Využitím výsledku pre elementárnu maticu z predchádzajúcej úlohy sa presveďte, že celková matica K_{ij} skonštruovaná sčítaním vhodných elementárnych matíc vedie na výsledok príkladu 10.3.4.

10.6 Kvadratické a kubické bázové funkcie

V predchádzajúcej časti sme našli predpis na výpočet elementárnych matíc. Pre ďalšiu diskusiu je výhodné previesť transformáciu integrovania vo výpočte ich prvkov z intervalu (x_i, x_{i+1}) na interval $(0,1)$,

$$z = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad dz = \frac{dx}{\Delta x_i}, \quad (10.6.1)$$

ktorej výsledkom je univerzálny vzťah pre bázové funkcie (10.5.5),(10.5.6)

$$\phi_0^e(z) = 1 - z \quad (10.6.2)$$

$$\phi_1^e(z) = z \quad (10.6.3)$$

(Obrázok 10.6.1) a vyjadrenie elementárnej matice

$$K_{\alpha\beta}^e = \frac{1}{\Delta x_i} \int_0^1 \lambda(z) \frac{d\phi_\alpha^e(z)}{dz} \frac{d\phi_\beta^e(z)}{dz} dz. \quad (10.6.4)$$

Výsledný priebeh teploty na tomto intervale možno zapísať v tvare

$$\vartheta(z) = U_0^e \phi_0^e(z) + U_1^e \phi_1^e(z) = U_0^e z + U_1^e (1 - z) = a^e z + b^e, \quad (10.6.5)$$

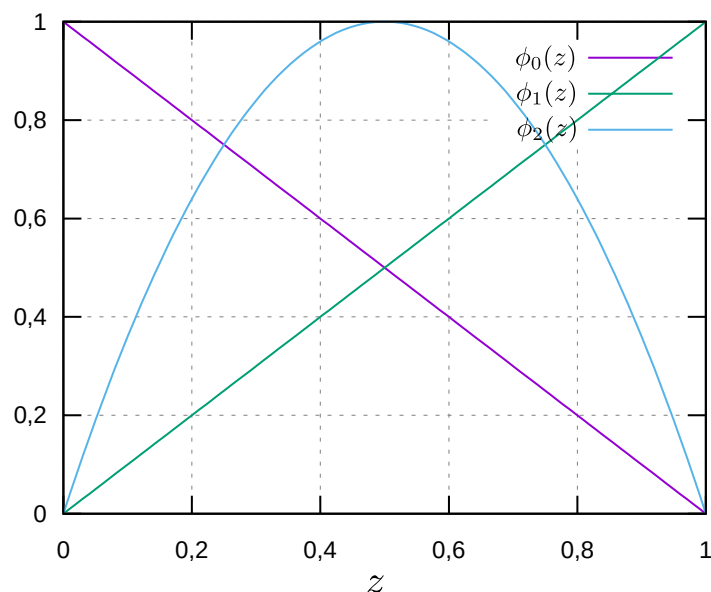
a je teda všeobecnou lineárnou funkciou. Koeficient U_α^e na elemente e s lokálnym indexom uzla/bázovej funkcie α zodpovedá koeficientu U_i s globálnym indexom i v rovnici (10.2.1) podľa priradenia (10.5.3).

Na susediacich intervaloch k intervalu e bude teplota inou všeobecnou lineárnou funkciou. Rozvoj (10.2.1) zabezpečí spojitost takejto počastiach lineárnej funkcie, ale derivácie budú v uzloch nevyhnutne nespojité.

Nájdené slabé riešenie možno priblížiť k silnému bohatšou voľbou bázových funkcií. Okrem priamočiarej možnosti zmenšenia dĺžky intervalov, a teda navýšenia počtu uzlov a lineárnych bázových funkcií sa používa aj prístup využívajúci obohatenie bázy pomocou kvadratických a kubických bázových funkcií. Ako ukážeme, naposledy spomenuté kubické bázové funkcie dokonca odstránia nespojitost prvej derivácie teplotného poľa v uzloch.

Ku dvom lineárnym funkciám na elemente môžeme pridať jednu kvadratickú funkciu v tvare

$$\phi_2^e(z) = 4z(1 - z), \quad (10.6.6)$$



Obr. 10.6.1: Lineárne bázové funkcie na jednotkovom intervale/elemente obohatené o jednu kvadratickú bázovú funkciu. Prvé dve funkcie majú funkčné hodnoty v jednom z hraničných uzlov jednotkovej, kvadratická bázová funkcia je v uzloch nulová a nadobúda jednotkovú hodnotu v strede intervalu.

ktorá nadobúda hodnotu 1 v polovici intervalu a nulové hodnoty na jeho hraniciach. Priebeh teploty na intervale bude potom všeobecná kvadratická funkcia,

$$\begin{aligned} \vartheta(z) &= \sum_{\alpha=0}^2 U_{\alpha}^e \phi_{\alpha}^e(z) = U_0^e z + U_1^e (1-z) + U_2^e 4z(z-1) \\ &= a^e z^2 + b^e z + c^e. \end{aligned} \quad (10.6.7)$$

Ku každému intervalu musíme takto pridať jeden neznámy rozvojový koeficient U_2^e , ktorého hodnota bude tiež výsledkom riešenia algebraických rovníc. Počet rovníc sa navýši, nakoľko množina testovacích funkcií sa tiež rozšíri o všetky kvadratické funkcie pridané na každom intervale. Koeficienty kvadratických funkcií nemajú vplyv na význam koeficientov $U_{0/1}^e$ ako hodnôt teploty v uzloch, nakoľko ich hodnoty v uzloch sú nulové.

Pridanie kvadratických funkcií síce zlepši kvalitu slabého riešenia (priblíži ho k silnému riešeniu), no nedokáže odstrániť nespojitosť prvých derivácií v uzloch. Na to je potrebné k báze pridať aj kubické funkcie. V tomto prípade sú na každom intervale štyri nenulové bázové funkcie, ktoré možno voliť

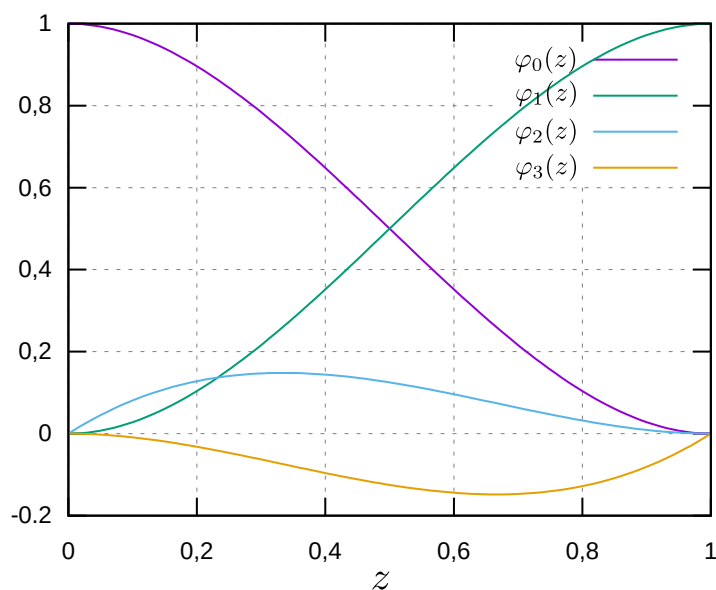
v tvare

$$\varphi_0^e(z) = (2z + 1)(z - 1)^2 \quad (10.6.8)$$

$$\varphi_1^e(z) = (3 - 2z)z^2 \quad (10.6.9)$$

$$\varphi_2^e(z) = z(z - 1)^2 \quad (10.6.10)$$

$$\varphi_3^e(z) = (z - 1)z^2 \quad (10.6.11)$$

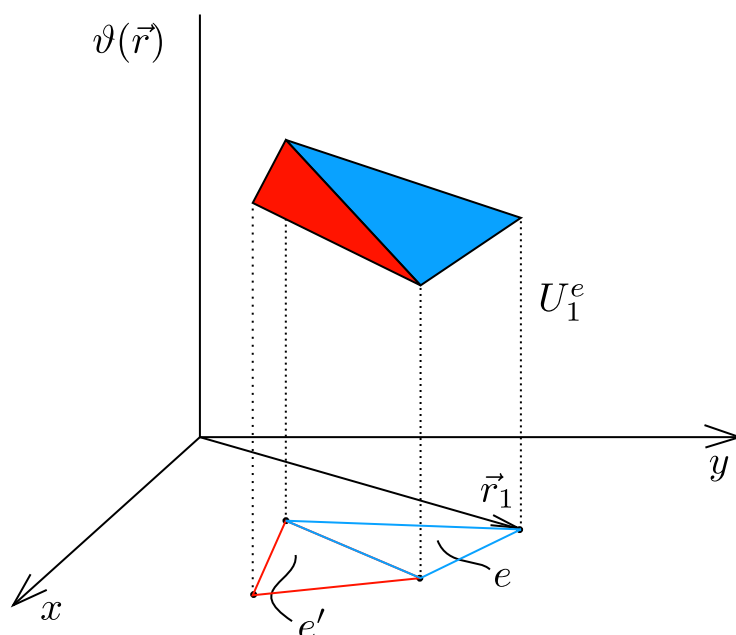


Obr. 10.6.2: Kubické bázové funkcie na jednotkovom intervale/elemente. Prvé dve funkcie majú funkčné hodnoty v jednom z hraničných uzlov jednotkové, druhé dve funkcie majú hodnoty derivácií v hraničných uzloch jednotkové.

Priebeh teploty na každom elemente/intervale je potom všeobecná kubická funkcia

$$\vartheta(x) = \sum_{\alpha=0}^3 U_{\alpha}^e \varphi_{\alpha}^e(x) = a^e z^3 + b^e z^2 + c^e z + d^e. \quad (10.6.12)$$

Prvé dva rozvojové koeficienty U_0^e a U_1^e určujú hodnotu teploty v uzloch a druhé dva koeficienty U_2^e a U_3^e hodnoty derivácií v uzloch. Výsledná teplota na celej oblasti riešenia má potom spojité aj prvé derivácie v uzloch, čo je veľmi vhodné z hľadiska presnosti výpočtu hustoty toku tepla.



Obr. 10.7.1: Reprezentácia teplotného poľa v 2D nad dvoma trojuholníkovými elementami e a e' v rovine pomocou po častiach lineárnej funkcie. Jeden z uzlov elementu e je označený polohovým vektorom \vec{r}_1 , hodnota teploty v tomto uzle je U_1^e .

10.7 MKP vo vyšších dimenziách

Pri formulácii MKP v 2D alebo 3D postupujeme podobne ako v 1D prípade v časti 10.1. Silná formulácia úlohy vedenia tepla predstavuje parciálnu diferenciálnu rovnicu s nenulovou pravou stranou,

$$-\nabla \cdot (\lambda \nabla \vartheta) = \sigma_u. \quad (10.7.1)$$

Jej slabú formuláciu nájdeme pre násobením testovacou funkciou $v(\vec{r})$, ďalším preintegrovaním cez celú oblasť riešenia, úpravou a použitím Gaussovej vety,

$$\int -\nabla \cdot (\lambda \nabla \vartheta) v dV = \int \sigma_u v dV \quad (10.7.2)$$

$$\int -\nabla \cdot (\lambda \nabla \vartheta v) dV + \int \lambda \nabla \vartheta \cdot \nabla v dV = \int \sigma_u v dV \quad (10.7.3)$$

$$-\oint (\lambda \nabla \vartheta v) \cdot d\vec{S} + \int \lambda \nabla \vartheta \cdot \nabla v dV = \int \sigma_u v dV \quad (10.7.4)$$

Prvý člen, plošný integrál po hranici oblasti, možno upraviť podľa požadovaných okrajových podmienok, druhý člen na ľavej strane povedie ku kon-

štruktúre matice K_{ij} .

V duchu rozvoja do konečnej bázy hľadáme teplotné pole v tvare

$$\vartheta(\vec{r}) = \sum_j U_j \phi_j(\vec{r}) \quad (10.7.5)$$

pričom bázové funkcie zároveň zodpovedajú množine testovacích funkcií, t. j.

$$v(\vec{r}) = \phi_i(\vec{r}), i = 1, \dots, N \quad (10.7.6)$$

Po dosadení rozvoja (10.7.5) do rovnice (10.7.4), vynásobením s i -tou testovacou funkciou a preintegrovaním cez výpočtovú oblasť V nájdeme opäť maticovú rovnicu

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} U_j = F_i, i = 1, \dots, N \quad (10.7.7)$$

kde

$$K_{ij} = \int_V \lambda \nabla \vartheta_i \cdot \nabla \vartheta_j dV \quad (10.7.8)$$

$$F_i = \int_V \sigma_u \vartheta_i dV - \int_S \vartheta_i \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \quad (10.7.9)$$

Uzly $i = 1, N$ sú body v 3D oblasti, ktoré vytvárajú 3D sieť.

Celú oblasť riešenia s objemom V pokryjeme elementami $e_n, n = 1, \dots, N_e$, každý s určitým objemom V_{e_n} . Maticu K_{ij} potom môžeme podobne ako v 1D rozložiť na súčet elementárnych matic

$$K_{ij} = \sum_{n=1}^{N_e} K_{ij}^{e_n} = \sum_{n=1}^{N_e} \int_{V_{e_n}} \lambda \nabla \vartheta_i \cdot \nabla \vartheta_j dV \quad (10.7.10)$$

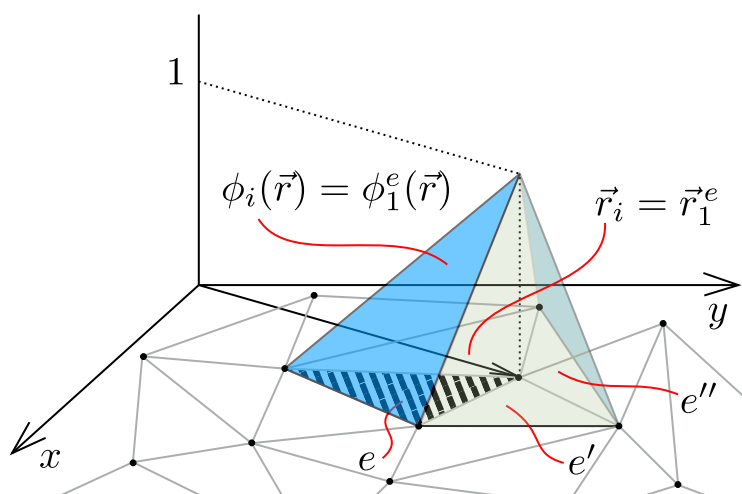
kde N_e je počet elementov pokrývajúcich oblasť V . Na výpočet elementárnych matic musíme už upresniť tvar elementov a voľbu bázových funkcií.

Predstavme si pre jednoduchosť rovinú úlohu v 2D. Oblasť riešenia – plochu o veľkosti S – môžeme pokryť konečným počtom N_e trojuholníkov. Jeden trojuholník predstavuje jeden element rovinnnej úlohy. Vrcholy trojuholníkov $\vec{r}_i, i = 1, \dots, N$ predstavujú uzly siete.

Najjednoduchšia verzia MKP v 2D hľadá priebeh funkcie na každom elemente v tvare všeobecnej lineárnej funkcie premenných x a y ,

$$\vartheta(x, y) = a_e + b_e x + c_e y \quad (10.7.11)$$

Koeficienty a_e, b_e a c_e sa líšia od jedného elementu k druhému, takže výsledná funkcia $\vartheta(x, y)$ je po častiach lineárna funkcia dvoch premenných, obrázok 10.7.1.



Obr. 10.7.2: Príklad lineárnej bázeovej funkcie $\phi_i(\vec{r})$ v 2D patriacej k uzlu v mieste $\vec{r}_i = \vec{r}_1^e$. Nad elementom e (vyznačný pásikmi) označujeme zodpovedajúcu časť tejto bázeovej funkcie ako $\phi_1^e(\vec{r})$. V ostatných dvoch uzloch elementu e je $\phi_1^e(\vec{r})$ nulová. Všeobecne nad elementom e predstavuje lineárnu funkciu premenných x a y , naznačenú modrou plochou. Na obrázku vidíme, že nad elementom e' je bázeová funkcia $\phi_i(\vec{r}) = \phi_1^{e'}(\vec{r})$ tiež lineárnou funkciou (zeleno-žltá priehľadná plocha). Platí, že bázeová funkcia $\phi_i(\vec{r})$ nadobúda nulovú hodnotu vo všetkých uzloch susediacich s uzlom \vec{r}_i .

Funkciu na danom elemente e možno napísať aj v inom tvare, pomocou vhodných bázeových funkcií $\phi_i(\vec{r})$, ktoré na danom uzle e indexujeme ich lokálnym indexom $\phi_\alpha^e(\vec{r})$, $\alpha = 1, 2, 3$,

$$\vartheta(x, y) = U_0^e \phi_0^e(\vec{r}) + U_1^e \phi_1^e(\vec{r}) + U_2^e \phi_2^e(\vec{r}) \quad (10.7.12)$$

Bázeové funkcie, podobne ako v 1D prípade, volíme tak, aby každá patrila ku konkrétnemu uzlu siete (Obr. 10.7.2). Označme tri uzly uvažovaného elementu ako \vec{r}_0^e , \vec{r}_1^e a \vec{r}_2^e . Potom bázeové funkcie vrámci tohto elementu si volíme takto:

$$\phi_\alpha^e(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \vec{r} = \vec{r}_\alpha^e \\ 0 & \vec{r} = \vec{r}_\beta^e, \beta \neq \alpha \\ \text{lineárna funkcia} & \vec{r} \in e \end{cases} \quad (10.7.13)$$

Tento predpis určuje tvar bázeových funkcií jednoznačne nie len na elemente e , ale v celej oblasti. Na obrázku 10.7.2 je príklad bázeovej funkcie nenulovej nad elementom e , ako aj jej rozšírenie na susediace elementy e' , e'' , a teda

aj na celú výpočtovú oblasť. Elementárna matica K_{ij}^e má nenulové len tie prvky, ktoré zodpovedajú uzlom uvažovaného elementu e . Preto nenulové budú len jej prvky $K_{\alpha\beta}^e$ (využívame opäť lokálny index uzlov, podobne ako v 1D v časti 10.5). Tieto prvky možno všeobecne vyjadriť pomocou vhodnej affinnej transformácie uvažovaného trojuholníkového elementu e na špeciálny pravouhlý trojuholník s jednotkovými dĺžkami odvesien. Detaily sú uvedené v príkladoch 10.7.9 a 10.7.10.

Príklad 10.7.9 Nájdite afinnú transformáciu všeobecného trojuholníkového elementu na pravouhlý trojuholník s jednotkovými dĺžkami odvesien.

Riešenie: Budeme hľadať afinnú transformáciu, ktorá zobrazí tri vrcholy špeciálneho trojuholníka na všeobecný

$$\begin{aligned} (0,0) &\rightarrow (x_0^e, y_0^e) \\ (1,0) &\rightarrow (x_1^e, y_1^e) \\ (0,1) &\rightarrow (x_2^e, y_2^e) \end{aligned} \quad \text{a v jednomtnom zápise} \quad \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

kde q_1 a q_2 sú súradnice bodov špeciálneho trojuholníka a x_1 a x_2 sú x -ová a y -ová súradnica bodu vnútri všeobecného trojuholníka $\vec{r} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$. Výsledný tvar takejto transformácie je

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1^e - x_0^e & x_2^e - x_0^e \\ y_1^e - y_0^e & y_2^e - y_0^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0^e \\ y_0^e \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{M} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \mathbf{r}_0^e \end{aligned}$$

Z posledného vyplýva, že prvky matice \mathbf{M} predstavujú parciálne derivácie

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = M_{ij}$$

Okrem toho vieme aj ľahko nájsť inverznú maticu k \mathbf{M} ,

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \begin{pmatrix} y_2^e - y_0^e & -(x_2^e - x_0^e) \\ -(y_1^e - y_0^e) & x_1^e - x_0^e \end{pmatrix}$$

kde $|\mathbf{M}| = (x_1^e - x_0^e)(y_2^e - y_0^e) - (x_2^e - x_0^e)(y_1^e - y_0^e)$ je jej determinant.

Príklad 10.7.10 Nájdite vyjadrenie pre elementárnu maticu $K_{\alpha\beta}^e$ pomocou transformácie integrovania cez všeobecný trojuholníkový element na integrovanie cez špeciálny pravouhlý trojuholníkový element s jednotkovou dĺžkou odvesien.

Riešenie: Na transformáciu využijeme vzťahy z príkladu 10.7.9, pomocou ktorých vyčíslime všeobecnú elementárnu maticu

$$\begin{aligned}
K_{\alpha,\beta}^e &= \int_e \lambda(\vec{r}) \nabla \phi_\alpha^e(\vec{r}) \cdot \nabla \phi_\beta^e(\vec{r}) dS_e \\
&= \int_e \lambda(\vec{r}) \left\{ \frac{\partial \phi_\alpha^e}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_\beta^e}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_\alpha^e}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_\beta^e}{\partial x_2} \right\} dx_1 dx_2 \\
&= \int_e \lambda(\vec{r}(q_1, q_2)) \left\{ \frac{\partial \phi_\alpha^e}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_\beta^e}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_\alpha^e}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_\beta^e}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_2} \right\} |\mathbf{M}| dq_1 dq_2 \\
&= \int_e \lambda(\vec{r}(q_1, q_2)) \left\{ \frac{\partial \phi_\alpha^e}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_\beta^e}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_k} \right\} |\mathbf{M}| dq_1 dq_2 \\
&= \sum_{i,j,k} M_{ik}^{-1} K_{\alpha\beta ij}^{e,q} M_{jk}^{-1} |\mathbf{M}|
\end{aligned}$$

kde

$$K_{\alpha\beta ij}^{e,q} = \int_e \lambda(\vec{r}(q_1, q_2)) \left\{ \frac{\partial \phi_\alpha^e}{\partial q_i} \frac{\partial \phi_\beta^e}{\partial q_j} \right\} dq_1 dq_2$$

Úloha 10.7.11 Uvažujte trojuholníkový element s jednotkovými odvesnami pozdĺž osi q_1 a q_2 . Tepelná vodivosť je λ .

- (a) Vychádzajúc z podmienok $\phi_1^e(0,0) = 0$, $\phi_1^e(1,0) = 1$, $\phi_1^e(0,1) = 0$ a z predpokladu, že $\phi_1^e(x,y)$ má byť všeobecnou lineárnou funkciou svojich premenných, nájdite jej konkrétny predpis $\phi_1^e(q_1) = q_1$,
- (b) Nájdite prvky $K_{0011}^{e,q}$, $K_{1011}^{e,q}$, a $K_{0212}^{e,q}$ matice $K_{\alpha\beta ij}^{e,q}$ z príkladu 10.7.10 ak

$$\phi_0^e(q_1, q_2) = 1 - q_1 - q_2, \quad \phi_1^e(q_1, q_2) = q_1, \quad \phi_2^e(q_1, q_2) = q_2.$$

10.8 Prechodné deje a MKP

Rovnica vedenia tepla opisujúca prechodné, t. j. od času závislé teplotné pole v troch rozmeroch má tvar

$$\rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla \vartheta) + \sigma_u \quad (10.8.1)$$

K rovnici musíme pridať aj vhodné okrajové podmienky, ktoré musí riešenie spĺňať v každom čase $t > t_0$.

Prechod k slabej formulácii je analogický postupu, ktorý sme použili pre stacionárnu rovnicu tepla, s výsledkom

$$\int \rho c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} v(\vec{r}) dV = - \int \lambda \nabla \vartheta \cdot \nabla v(\vec{r}) dV + \int \sigma_u v(\vec{r}) dV + \oint v(\vec{r}) \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \quad (10.8.2)$$

kde $v(\vec{r})$ je testovacia funkcia. Riešenie hľadáme v tvare konečného radu, ktorého koeficienty, na rozdiel od stacionárnych úloh, môžu závisieť od času,

$$\vartheta(t, \vec{r}) = \sum_{j=1}^N U_j(t) \phi_j(\vec{r}) \quad (10.8.3)$$

Hodnota koeficientov $U_j(t)$ v čase $t = t_0$ špecifikuje počiatočnú podmienku slabého riešenia. Dosadením radu (10.8.3) do rovnice (10.8.2) nájdeme sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc, ktorú musia koeficienty $U_j(t)$ spĺňať,

$$\sum_j T_{ij} \frac{dU_j}{dt} = - \sum_j K_{ij} U_j + F_i, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (10.8.4)$$

kde

$$T_{ij} = \int \phi_i \phi_j \rho c dV \quad (10.8.5)$$

a K_{ij} a F_i sú už pre nás známe výrazy pre maticu a pravú stranu algebraických rovníc MKP. Na rozdiel od stacionárnych úloh, môžu byť tieto výrazy aj funkciami času. Napríklad, predpísaný v čase premenlivý elektrický prúd prechádzajúci výhrevným vodičom sa prejaví časovo premenným zdrojovým členom F_i na pravej strane.

Sústavu obyčajných rovníc možno riešiť mnohými numerickými metódami, ako sú napr. Cranckova–Nickolsonovej metóda, alebo iné [29]. Detailami ich implementácií sa v tomto texte nebudeme zaoberať.

Úloha 10.8.12 Nájdite vyjadrenie pre maticu T_{ij} z príkladu 10.3.4 a predpokladajte, že $\rho c = \text{konst.}$

Zoznam použitých symbolov

Učebnica obsahuje pomerne veľký počet fyzikálnych veličín a matematických označení. Väčšina z nich má zaužívané označenie, symbol. Nakoľko túto zvyklosť nechceme narúšať, tak často narážame na problém, že odlišné veličiny majú veľmi podobné alebo dokonca rovnaké označenie. Pre ľahšiu orientáciu čitateľa poslúži nasledujúci zoznam použitých symbolov. Ku väčšine symbolov je pridaný odkaz na ich prvé alebo najdôležitejšie použitie. Ak niektorý označuje dve odlišné veci, tak sme na túto skutočnosť upozornili. V týchto zriedkavých prípadoch ide o natoľko odlišné veličiny, že pokiaľ čitateľ rozumie kontextu, tak nehrozí, že by došlo k ich zámene.

Grécke symboly

α	koeficient prestupu tepla (6.2.4)
β	koeficient teplotnej rozpínavosti (1.6.6)
γ, γ_{ij}	konduktivita, tenzor elektrickej konduktivity (5.2.12)
δ	charakteristická vzdialenosť poklesu teploty (6.10.8) alebo šírka medznej vrstvy (str. 171) alebo vyjadrenie infinitezimálnej zmeny veličiny, ktorá nie je úplný diferenciál (1.2.2)
ϵ	emisivita vyžarovania reálneho povrchu (6.2.9)
$\eta, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$	koeficient dynamickej viskozity, 1. a 2. koeficient dynamickej viskozity (5.3.18), (5.3.19)
θ, ϑ	označenia pre teplotu
κ	koeficient stlačiteľnosti (1.6.8)
λ	koeficient tepelnej vodivosti (5.2.21)
$\mu_\alpha, \tilde{\mu}_\alpha$	chemický potenciál (1.3.15), (5.1.3)
ν	koeficient kinematickej viskozity (5.4.5)

ν_D	difuzivita (7.5.2)
ξ	pomer dĺžkových premenných, napr. (8.4.2)
Π	Peltierov koeficient (5.2.30)
ρ, ρ_α	hustota hmotnosti (2.1.1) a hustota hmotnosti zložky α (2.5.1)
ρ_q	hustota elektrického náboja (str. 75)
$\sigma_{m,\alpha}$	produkcia hmotnosti zložky α (str. 51)
$\sigma_u, \sigma_{u,N}$	celková (5.6.2) a nerovnovážna časť produkcie vnútornej energie (5.6.7)
$\vec{\sigma}, \sigma_{ij}$	tenzor napätia, zložky tenzora napätia (5.3.3), (5.3.20)
$\vec{\sigma}_N, \sigma_{N,ij}$	nerovnovážna časť tenzoru napätia, resp. tenzor viskózneho napätia, jeho zložky (3.2.1)
τ	relaxačný čas ohrevu/chladnutia (str. 135)

Termohydraulické čísla

Bi	Biotovo číslo (7.1.12)
Re	Reynoldsovo číslo (8.4.4)
Nu	Nusseltovo číslo (8.6.5)
Pr	Prandtlovo číslo (8.6.8)
Ra	Rayleighovo číslo (8.9.4)

Označenia symbolmi latinky

A	práca konaná sústavou (1.4.12)
C, c	tepelná kapacita (7.1.4) a hmotnostná tepelná kapacita (7.1.1), pokiaľ zanedbávame zmenu objemu, ale aj molárna koncentrácia alebo molarita (str. 59)
C_V, c_V, C_p, c_p	celková a hmotnostná tepelná kapacita pri konštantom objeme, pri konštantnom tlaku
c_α	hmotnostný zlomok zložky c_α (2.5.9)
E, e	celková energia a jej hustota (4.1.6), e tiež absolútna hodnota elektrického náboja elektrónu
E_k, e_k	makroskopická kinetická energia a jej hustota (4.1.1)
F	voľná energia (1.7.1) alebo Faradayov náboj (5.2.15)
\vec{f}_α	sila pôsobiaca na jednotkovú hmotnosť látky (3.3.1)
f_D	koeficient trenia (8.4.2)
\vec{g}, g	vektor a veľkosť tiažového zrýchlenia (3.1.3)
H, h	entalpia (1.8.1) a hmotnostná entalpia (str. 1.8.4)
\vec{j}_α	hustota difúzneho toku zložky α (2.5.10)
\vec{j}_e, \vec{j}_{e_k}	hustoty toku energie a makroskopickej kinetickej energie (4.2.4)
J_m, \vec{j}_m	tok hmotnosti (2.2.1) a hustota toku hmotnosti (2.2.6)
$\vec{j}_u, \vec{j}_{u,nc}$	veľičiny patriace k vnútornej energii: hustota toku (4.3.3), hustota nekonvektívneho toku (4.3.4)
J_V	tok kvapaliny (2.2.7)
J_Q, \vec{j}_Q	tok tepla (4.3.6) a hustota toku tepla (5.2.9), (5.3.8)
\vec{j}_q	prúdová hustota (str. 75)
k	pomer priemerného oteplenia v priereze k optepleniu povrchu (úloha 6.10.3)
$L_Q, L_V, L_\alpha, L_{ij}$	Onsagerove koeficienty (1.5.7), (1.5.14), (5.2.23)
m, m_α	hmotnosť látky alebo častice, hmotnosť častice zložky α
M	intenzita tepelného vyžarovania povrchu absolútne čierneho telesa (6.2.8)
$M_{m,\alpha}$	mólová hmotnosť zložky α

N_A	Avogadrova konštanta
n_α	látkové množstvo zložky α v kapitole 1 alebo molalita zložky α v podkapitole 5.1
\vec{n}	jednotkový vektor kolmý na infinitezimálnu plôšku, normála.
P	dodávaný výkon, resp. príkon
p	tlak (1.2.3) alebo premenná obrazu Laplaceovej transformácie (7.4.2)
\vec{P}	hybnosť častíc (3.2.6)
R	univerzálna plynová konštanta alebo polomer
R_T	tepelný odpor (6.5.1)
S, s	entropia (str. 21), hmotnostná entropia (str. 74)
$d\vec{S}, dS, S$	element orientovanej plochy, element neorientovanej plochy a veľkosť plochy
S	Seebeckov koeficient (5.2.34)
T	absolútna termodynamická teplota (str. 21)
U, u	vnútorná energia (1.3.2), hmotnostná vnútorná energia (4.1.5)
V, \mathcal{V}	objem, špecifický objem (str. 8)
$\vec{v}(\vec{r}, t)$	rýchlostné pole jednozložkovej látky (2.1.3) alebo baricentrická rýchlosť pre viaczložkovú látku (2.5.5)
$\vec{v}_\alpha(\vec{r}, t)$	rýchlostné pole zložky α látky (2.1.3)
W	práca vykonaná na sústave (1.2.2)
\boldsymbol{x}	všeobecné označenie skupiny nezávislých stavových veličín (1.1.9)
z_α	špecifický náboj častíc zložky α (3.1.5)

Literatúra

- [1] A. Sommerfeld, *Thermodynamics and Statistical Mechanics, Lectures on Theoretical Physics*, Vol. V, Academic Press, N.Y. (1950), ISBN 0-1265-4680-0.
- [2] A. B. Pipard, *Elements of Classical Thermodynamics: For Advanced Students of Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1957), ISBN 0-5210-9101-2.
- [3] Ch. Kittel, *Thermal Physics*, W. H. Freeman and Company, New York (1980), ISBN 0-7167-1088-9.
- [4] P. Atkins a J. de Paula, *Physical Chemistry* 8th ed., W. H. Freeman and Company, New York (2006), ISBN 0-7167-8759-8.
- [5] R. K. Pefley and R. I. Murray, *Thermofluid mechanics*, McGraw-Hill Book Company, New York (1966), ISBN 0-0704-9216-6.
- [6] D. Ilkovič, *Fyzika I*, Alfa, STNL (1968), prístupné online na https://www.ujfi.fei.stuba.sk/?page_id=509, ISBN 63-551-72.
- [7] I. Červeň, *Fyzika po kapitolách*, časť 7, STU Bratislava (2007), prístupné online na https://www.ujfi.fei.stuba.sk/?page_id=1064, ISBN 8-0227-2669-6.
- [8] L. D. Landau a E. M. Lifšic, *Statističeskaja fizika*, Nauka, Moskva (1976).
- [9] *ThermExcel: Steam characteristics*, prístupné online na https://www.thermexcel.com/english/tables/vap_eau.htm, citované 28. 7. 2024.
- [10] *ThermExcel: Physical characteristics of water*, prístupné online na https://www.thermexcel.com/english/tables/eau_atm.htm, citované 28. 7. 2024.
- [11] A. Sommerfeld, *Mechanics of Deformable Bodies, Lectures on Theoretical Physics*, Vol. II, Academic Press, N.Y. (1950), ISBN 0-1265-4652-5.

- [12] Y. Nakayama, *Introduction to Fluid Mechanics*, Butterworth-Heinemann, Oxford (2000), ISBN 0-3406-7649-3.
- [13] S. R. de Groot and P. Mazur, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, Dover Publications, Inc., New York (1984), ISBN 0-486-64741-2.
- [14] Š. Barta, *Nerovnovážna termodynamika*, STU Bratislava (1989), ISBN 80-227-0031-2.
- [15] Pavol Brunovský, *Navier-Stokesova rovnica*, Týždeň (2010). prístupné online na <https://www.tyzden.sk/casopis/7052/navier-stokesova-rovnica/>, citované 28.7.2024.
- [16] M. Kalousek a B. Hučko, *Prenos tepla*, STU Bratislava (1996), ISBN 80-227-0881-X.
- [17] K. Ferstl a M. Masaryk, *Prenos tepla*, STU Bratislava (2011), ISBN 978-80-227-3534-6.
- [18] J. P. Holman, *Heat transfer*, McGraw-Hill (2010), ISBN 978-0-07-352936-3.
- [19] J. Lienhard a J. Lienhard, *A Heat Conduction Textbook*, 2. vydanie Phlogiston Press, Cambridge, MA (2012). ISBN 0-4868-3735-1.
- [20] F. Incropera et al. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons, Inc., (2007). ISBN 0-471-45728-0.
- [21] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford (1959). ISBN 978-01-985-3368-9.
- [22] J. Krempaský, *Meranie Termofyzikálnych veličín*, Vydavateľstvo Slovenskej akadémie vied v Bratislave, (1969), ISBN 71-044-69.
- [23] Elmer: voľne prístupný multifyzikálny simulačný program, prístupný online na <http://www.elmerfem.org>, citované 28. 7. 2024.
- [24] I. Červeň a P. Bokes, *Fyzika po kapitolách*, časť 5, STU Bratislava (2024), prístupné online na https://www.ujfi.fei.stuba.sk/?page_id=1064, ISBN 978-80-227-5350-0.
- [25] J. Pišút, L. Gomolčák, a V. Černý, *Úvod do kvantovej mechaniky*, Alfa Bratislava (1983), prístupné online na https://zona.fmph.uniba.sk/fileadmin/fmfi/sluzby/elektronicke_studijne_materialy/uvod_kvantova_mechanika.pdf, ISBN 978-80-89186-33-4.

- [26] I. Červeň a P. Bokes, *Fyzika po kapitolách*, časť 13, STU Bratislava (2023), prístupné online na https://www.ujfi.fei.stuba.sk/?page_id=1064, ISBN 978-80-227-5355-5.
- [27] A. Markoš a P. Markoš, *Zahalená planéta*, Vydavateľstvo Pavel Mervart, Červený Kostelec (2021), ISBN 978-80-7465-442-8.
- [28] G. Strang: Computational Science And Engineering I, prístupné online na <https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-085-computational-science-and-engineering-i-fall-2008/index.htm>, citované 28. 7. 2024.
- [29] William H. Press *et. al.*: *Numerical Recipes in C : the Art of Scientific Computing.*, Cambridge University Press, New York (1992), ISBN 978-0-521-88068-8.

doc. Ing. Peter Bokes, PhD.

TERMODYNAMIKA A PRESTUP TEPLA

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve
SPEKTRUM STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2024.

Edícia vysokoškolských učebníc

Rozsah 213 strán, 44 obrázkov, 3 tabuľky, 10,043 AH, 10,276 VH,
1. vydanie, edičné číslo 6202.

85 – 220 – 2024

ISBN 978-80-227-5438-5

DOI: 10.61544/ WVVR4272